Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard

$1^{\text{ère}}$ES2 - Devoir Maison n°2 - Corrigé

Exercice 1. Résolution

Résoudre les équations et inéquations suivantes:

a) $3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 0$

On calcule le discriminant: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{4} = 0$, donc il y a une unique solution qui est $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $\frac{1}{2} - 4x^2 - x = 0$

Corrigé en classe.

c) $-5x^2 - 2x + 3 \leq 0$

Comme toujours, on calcule le discriminant: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-5) \times 3 = 64 = 8^2$. Les deux racines sont $x_1 = \frac{2-8}{-10} = \frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{2+8}{-10} = -1$. On sait alors que le polynôme est négatif (ici du signe de $a = -5$) à l'extérieur des racines, donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup [\frac{3}{5}; +\infty[.$$

d) $(x + 10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0$

Corrigé en classe.

Exercice 2. Une équation bicarrée

Résoudre l'équation

$$(E) \qquad x^4 - 6x^2 + 8 = 0.$$

Pour cela, on pose $t = x^2$. L'équation (E) devient

$$(E') \qquad t^2 - 6t + 8 = 0$$

(En effet, $t^2 - 6t + 8 = (x^2)^2 - 6x^2 + 8 = x^4 - 6x^2 + 8$). Cette nouvelle équation intermédiaire est une équation du second degré que nous savons résoudre, ce que l'on fait. Le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 8 = 4 = 2^2$, il y a donc deux solutions pour l'équation (E') qui sont $t_1 = 2$ et $t_2 = 4$. Maintenant, il faut revenir à l'équation de départ. Comme $t = x^2$, il faut alors résoudre

$$x^2 = 2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 4,$$

ce qui donne les quatre solutions évidentes -2, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ et 2, donc

$$\mathcal{S} = \left\{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\right\}$$

Exercice 3. Les bords en moins

Un tapis rectangulaire est usagé sur les bords. On décide d'enlever tout autour une bande de $0,5$ m de large. On obtient ainsi un petit tapis rectangulaire d'aire égale à la moitié de l'aire précédente et dont les dimensions L et l sont telles que $L = \frac{3}{2}l$. Calculer l puis L.

Corrigé en classe.

Exercice 4. Appareils photos

Une entreprise produit des appareils photographiques jetables d'un certain prix.

1. *Les coûts, en euros, liés à cette fabrication dépendent de la quantité q d'appareils fabriqués. Ils s'expriment par la relation*

$$C(q) = 0,2q^2 - 6q + 50.$$

a) Calculer le montant des coûts pour une production de 20 appareils.

On remplace q par 20:

$$C(20) = 0,2 \times 20^2 - 6 \times 20 + 50 = 10$$

Ainsi, la production de 20 appareils jetables coûtera 10 euros.

b) Calculer le nombre d'appareils fabriqués correspondant à un montant de 250 *€.*

On cherche donc q tel que $C(q) = 250$, c'est à dire qu'on doit résoudre l'équation

$$0,2q^2 - 6q + 50 = 250 \Longleftrightarrow 0,2q^2 - 6q - 200 = 0$$

La méthode habituelle permet d'obtenir deux solutions à cette équation: -20 et 50. Le nombre d'appareils fabriqué étant positif, on conclut que 250 e est le coût de fabrication de 50 appareils.

2. *Le prix de vente unitaire de ces appareils photographiques jetables est égal à* 6 *€.*

a) Exprimer $V(q)$ le prix de vente total de q appareils, en fonction de q.

Il est clair que $V(q) = 6q$.

b) Calculer $V(20)$ et $V(60)$.

Tout le monde sait faire une multiplication. On trouve donc $V(20) = 120$ et $V(60) = 360$.

3. *A partir de quel nombre d'appareils l'entreprise produirait et vendrait à perte ?*

L'entreprise vend à perte lorsque sa recette est inférieure à son coût de fabrication, c'est à dire lorsque

$$V(q) < C(q) \Longleftrightarrow V(q) - C(q) < 0 \Longleftrightarrow -0,2q^2 + 6q - 50 < 0$$

Il s'agit d'une inéquation du secon degré. On cherche donc le signe du trinôme par la méthode habituelle. Le discriminant $\Delta = 104$ est positif donc il y a deux racines

$$q_1 = 30 - 5\sqrt{26} \simeq 4,5 \text{ et } q_2 = 30 + 5\sqrt{25} \simeq 54,5$$

On sait que le trinôme est négatif (du signe de a) à l'extérieur de ses racines. Par conséquent, à partir de 55 appareils (et pour 4 ou moins), l'entreprise produirait et vendrait à perte.

Exercice 5. Coefficients sous contrainte

Trouver les réels a, b, c tel que le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

$$P(0) = 2, \quad P(1) = 3, \quad P(3) = -1.$$

On utilise les trois contraintes pour obtenir un système de 3 équations à 3 inconnues, facile à résoudre.

$P(0) = c = 2$ donc on sait déjà que $c = 2$.

$P(1) = a + b + c = a + b + 2 = 3$ donc on a $a + b = 1$.

$P(3) = 9a + 3b + c = 9a + 3b + 2 = -1$ donc on a aussi $9a + 3b = -3$ ou encore $3a + b = -1$.

Au final, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} c & = & 2 \\ a + b & = & 1 \\ 3a + b & = & -1 \end{cases}$$

dont on trouve facilement les solutions (par exemple par substitution)

$$\begin{cases} c & = & 2 \\ a & = & -1 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

et donc

$$P(x) = -x^2 + 2x + 2$$