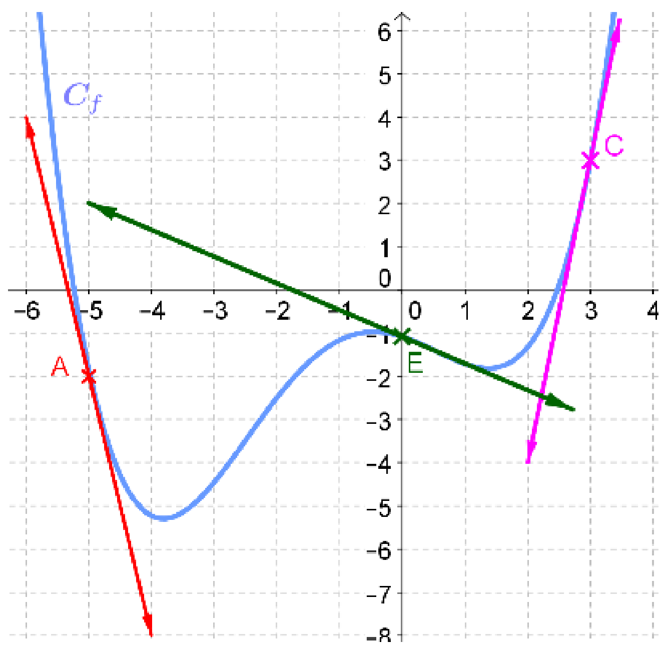
Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

$1^{\text{ère}}$ES2 - Devoir Maison n°3

*A rendre au plus tard le **2 Mars 2015**. Toutes les réponses doivent être **justifiées** et correctement **rédigées.***

Exercice 1. Lecture graphique
On représente ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que plusieurs tangentes à la courbe de f en certains points.



1. Déterminer, graphiquement, les valeurs de $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$.
2. Déterminer, graphiquement, les valeurs de $f'(-5)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. En déduire les équations des tangentes T_{-5}, T_0 et T_3.

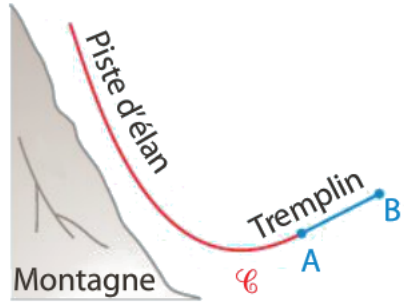
Exercice 2. Un calcul de dérivé
1. Rappeler la formule du cours de la dérivée $f'(x)$ lorsque $f(x) = x^3$.

On se propose de démontrer cette formule, comme on l'a fait dans le cours pour $x \mapsto x^2$.
2. En écrivant $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$ et en utilisant une identité remarquable, donner une formule pour $(a+b)^3$.
3. Utiliser la question précédente pour calculer le taux d'accroissement

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

4. Justifier qu'on a bien le résultat annoncé à la question **1.**
5. On introduit alors, pour $n \geq 0$, la suite (a_n) définie par $a_n = f'(n)$. Après avoir explicité les 3 premiers termes, déterminer (en justifiant), le sens de variations de (a_n).

Exercice 3. Saut à ski (*d'après Hyperbole 1ES-L, Nathan*)
Une station de ski cherche à installer un tremplin de saut. Il est alors important que la piste au bout de laquelle se trouve le tremplin soit jointe à ce dernier **sans cassure**. La situation est modélisée comme ci-dessous.



On connait les coordonées de A et B dans un certain repère, qui sont $A(3;1)$ et $B(5;3)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

Dans ce même repère, on sait que la fonction f dont la courbe représente la piste d'élan est définie sur $]2;+\infty[$ et est de la forme

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 10}{x - 2}.$$

2. Déterminer une première condition, sur a et b, pour que le tremplin et la piste soient joints.

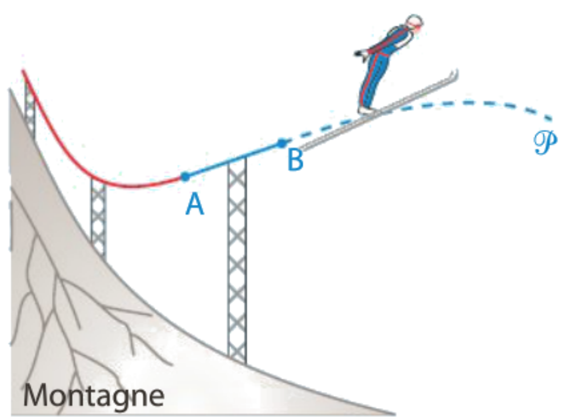
On admet que la dérivée de f est donnée par la formule

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - 10}{(x-2)^2}.$$

Pour que la transition de la piste au tremplin soit bonne, il est nécessaire que l'axe du tremplin soit dans le prolongement de la piste. C'est à dire que le coefficient directeur de (AB) soit le même que celui de la tangente à la courbe en A.

3. En déduire une seconde condition sur a et b puis, à l'aide de la première, déterminer a et b.

Juste avant son saut, le skieur se trouve en B, comme dans le dessin ci dessous.



On admet que, dans ce même repère, la trajectoire de son saut est modélisée par la fonction g, définie sur $[5;20]$ par

$$g(x) = cx^2 + dx + e$$

et dont la courbe représentative est notée $\mathcal{P}$ et apparaît en pointillés.

4. Que représente alors la droite (AB) pour la parabole $\mathcal{P}$?

5. Que représente la condition $g'(10) = 0$ pour le skieur ?

6. A l'aide des observations précédentes, trouver trois conditions sur c, d, e puis déterminer ces trois paramètres.