

1^{ère}ES2 - Devoir Maison n°5

A rendre au plus tard le 4 Mai 2015. Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées. Ce Devoir Maison est individuel et facultatif.

Une urne contient n jetons dont 7 sont verts et les autres sont rouges. On y tire au hasard successivement et **sans remise** deux jetons. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de couleurs différentes à la fin de l'expérience. L'objectif de ce problème est de déterminer pour combien de jetons n l'espérance de la variable aléatoire X est maximale.

Préliminaires

1. Quel est, en fonction de n , le nombre de jetons rouges ?
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

Partie 1 - $n = 10$

Dans cette partie on suppose qu'il y a **10 jetons en tout**.

1. Calculer la probabilité des événements suivants:
 - A : les deux jetons sont verts
 - B : les deux jetons ont la même couleur
 - C : le premier jeton est vert, le second est rouge
 - D : les deux jetons sont de deux couleurs différentes
2. Modéliser l'expérience aléatoire par un arbre pondéré.
3. Dresser le tableau représentant la loi de probabilité de X .
4. Que vaut dans ce cas $\mathbb{E}(X)$?

Partie 2 - Cas général

On revient au cas général; l'urne contient n jetons, où n est un entier tel que $n \geq 9$.

1. Avec les mêmes notations que dans la partie précédente, calculer $P(A)$ et $P(C)$.
2. Dessiner l'arbre pondéré correspondant.
3. Etablir la loi de X .
4. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}.$$

5. On appelle f la fonction définie sur $]9; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 13x - 98}{x(x-1)}$.
 - a) Montrer qu'on peut écrire

$$f'(x) = \frac{-14(x-x_1)(x-x_2)}{x^2(x-1)^2}$$

où $x_1 \simeq 0,52$ et $x_2 \simeq 13,48$.

- b) En déduire les variations de f sur $]9; +\infty[$.
6. Conclure.

Bonus

On suppose à nouveau qu'il y a 10 jetons en tout et qu'on joue à ce jeu 4 fois, c'est à dire qu'on fait les deux tirages précédents 4 fois consécutives de manière indépendante. On appelle succès l'obtention de deux jetons de couleurs différentes et on note Y la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

1. Quelle loi suit Y ? Préciser les paramètres.
2. Quelle formule donne $P(Y = 2)$?
3. Calculer $P(Y = 0)$. En déduire $P(Y \geq 1)$.