Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

1ÈRE ES2 - DEVOIR SURVEILLÉ N°3

CORRECTION

Question de cours

On considère la suite (a_n) définie pour $n \geq 0$ par

$$a_n = -(2n-1)^2 + 15.$$

1. Pour calculer les quatre premiers termes de la suite, on replace successivement n par $0, 1, 2$ et 3 dans l'expression précédente

On obtient $a_0 = a_1 = 14$, $a_2 = 6$ et $a_3 = -10$.

2. On a $a_{n+1} = -[2(n+1)-1]^2 + 15 = -[2n+2-1]^2 + 15 = -(2n+1)^2 + 15$, qu'on peut aussi développer complètement mais qu'il est préférable de laisser comme ça.

3. La différence de deux termes consécutifs s'écrit donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[-(2n+1)^2 + 15\right] - \left[-(2n-1)^2 + 15\right] \\ &= (2n-1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n-1+2n+1)(2n-1-2n-1) \\ &= 4n \times (-2) \\ &= -8n, \end{aligned}$$

ce qui est négatif pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite (a_n) est décroissante.

Exercice 1 - Abonnements

Un journal, vendu exclusivement sur abonnement, comptait 25000 abonnés au début de l'année 2010. Le service des abonnements estime que, d'une année sur l'autre, d'une part 80% des lecteurs renouvellent leur abonnement, et d'autre part, qu'il y aura 20000 nouveaux abonnés.

On note 0 le rang de l'année 2010. Les années suivantes seront notées $1, 2, \ldots$

1. *a*) En 2011, on récupère 80% des abonnés de 2010, soit $0,8 \times 25000 = 20000$ et on a 20000 abonnés de plus pour un total de 40000 abonnés.

b) Le tableau complété donne

Année n	0	1	2	3	4	5
Abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424

2. On note (u_n) le nombre estimé d'abonnés durant l'année n.

a) La différence entre le nombre d'abonnés pendant deux années consécutives n'est pas toujours la même, ce n'est donc pas une suite arithmétique.

b) Le rapport entre le nombre d'abonnées pendant eux années consécutives n'est pas toujours le même, ce n'est donc pas une suite géométrique.

c) En appliquant la règle de calcul qui nous a permis de compléter le tableau précédent, on écrit facilement

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 20000.$$

3. Le directeur souhaite 100 000 abonnés pour rentabiliser les investissements récents. Il calcule alors, pour chaque année, la différence w_n entre son objectif et le nombre estimé d'abonnés. On a donc $w_n = 100000 - u_n$.

a) On présente les premiers termes de la suite sous forme de tableau:

Année n	0	1	2	3	4	5
Abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424
w_n	75000	60000	48000	39400	30720	24576

b) On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 10000 - u_{n+1} = 10000 - (0,8u_n + 20000) \\ &= 80000 - 0,8u_n \end{aligned}$$

c) En factorisant par $0,8$, on voit que

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 0,8 \times (10000 - u_n) \\ &= 0,8 \times w_n \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que (w_n) est géométrique de raison $0,8$.

d) D'après le cours, le terme général d'une suite géométrique de raison q s'écrit

$$w_n = w_0 \times q^n = 75000 \times 0,8^n.$$

4. Par définition de w_n, on peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} u_n &= 100000 - w_n \\ &= 100000 - 75000 \times 0,8^n \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer directement u_{10}, qui correspond au nombre d'abonnés estimé pour 2020:

$$\begin{aligned} u_{10} &= 100000 - 75000 \times 0,8^{10} \\ &\simeq 91947 \end{aligned}$$

Exercice 2

José et Josette décident d'économiser de l'argent en vue d'acheter un vélo electrique d'une valeur de 875 euros. José commence par mettre dans sa tirelire 2 euros et décide d'y mettre chaque jour un euro de plus que le jour précédent. Josette quant à elle, commence en déposant 2 euros mais décide d'augmenter la somme ajoutée chaque jour de 20% par rapport à celle déposée la veille au fond de la tire-lire.

On note u_n la somme déposée par José le $n-$ième jour et w_n celle déposée par Josette au même moment.

Il est clair que $u_{n+1} = u_n + 1$ et que $w_{n+1} = 1,2 \times w_n$ (avec $u_1 = w_1 = 2$) - car une hausse de 20% correspond à un coefficient multiplicateur de $1,2$ - et donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 1 et la suite (w_n) est géométrique de raison $1,2$.

On en déduit les expressions des deux termes généraux

$$u_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$$

et

$$w_n = 1,2^{n-1} \times 2.$$

Au bout de deux semaines (c'est à dire à la fin du 14ème jour), la somme dans la tire-lire de José est

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_{14} = 14 \times \frac{(u_1 + u_{14})}{2} = 14 \times \frac{(2+15)}{2} = 119$$

soit 119 euros, alors que celle dans la tire-lire de Josette est

$$S' = w_1 + w_2 + ... + w_{14} = 2 \times \frac{1 - 1,2^{14}}{1 - 1,2} \simeq 118,40$$

soit 118,40 euros.

Pour déterminer qui atteindra la somme nécessaire à l'achat du vélo en premier, on rentre dans la calculatrice les expressions donnant les sommes dans les tire-lire de José et Josette au bout de n jours et la fonction TABLE permet de voir quelle expression et pour quelle valeur de n on dépasse le montant du vélo.

La somme dans la tire-lire de José au bout de n jours est

$$S = n \times \frac{(u_1 + u_n)}{2} = n \times \frac{(2 + n + 1)}{2} = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n\right)$$

alors que celle dans la tire-lire de Josette est

$$S' = 2 \times \frac{1 - 1,2^n}{1 - 1,2} = 2 \times \frac{1 - 1,2^n}{-0,2} = 10 \times (1,2^n - 1)\,.$$

La calculatrice permet alors de voir que pour $n = 24$, aucun des deux n'a encore la somme requise ($S = 324$ et $S' \simeq 785$) mais que pour $n = 25$, Josette est la première à atteindre la somme nécessaire ($S = 350$ et $S' \simeq 944$).

C'est donc Josette qui peut, la première, s'offrir le vélo après 25 jours.

Bonus

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

1. On trouve que

$$u_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2}{2^2} = u_2$$

et que $u_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$.

2. Le calcul donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

3. $2n = n + n \geq n + 1$ donc $\frac{n+1}{2n} \leq 1$, pour toute valeur de n.

4. u_n est défini comme un quotient de nombres positifs, donc u_n est toujours positif. Ainsi, multiplier par u_n ne change pas le signe ans l'inéquation suivante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Longleftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

et par conséquent la suite (u_n) est décroissante.