Année 2014-2015 - Première ES
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

CHAPITRE 6 : DÉRIVATION

Ce chapitre introduit la notion de *nombre dérivé*, présente les régles de calcul de la dérivée d'une fonction pour enfin appliquer cela à l'étude des fonctions.

Préliminaires : Rappels sur les droites

On rappelle que, dans un repère orthonormé, l'*équation réduite* d'une droite (d) est de la forme

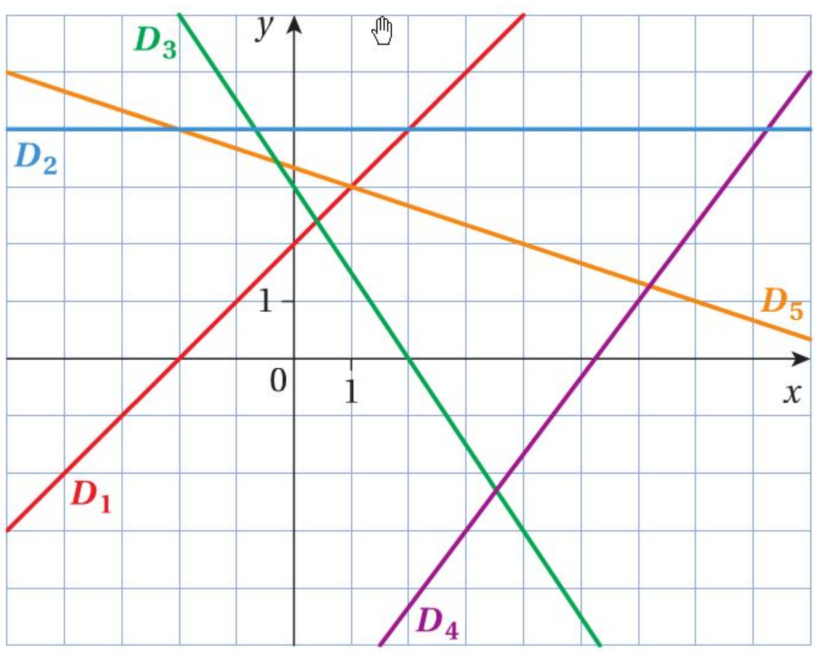
$$(d) \qquad y = ax + b,$$

où a, b sont deux paramètres réels fixés caractérisant la droite. C'est une relation entre les coordonnées x et y des points $M(x,y)$ qui sont sur la droite.

- a s'appelle le *coefficient directeur*. Il caractérise l'inclinaison de la droite. Si on connait deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la droite, alors on a la formule
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
En particulier, si $a = 0$, la droite est *horizontale* (il y a une pente nulle). De plus, deux droites son parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
- b s'appelle l'*ordonnée à l'origine*. C'est la valeur de l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

On rapelle également que la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est naturellement la droite d'équation $y = ax + b$.

Exercice 0.1. Donner les équations des quatre droites représentées ci-dessous.

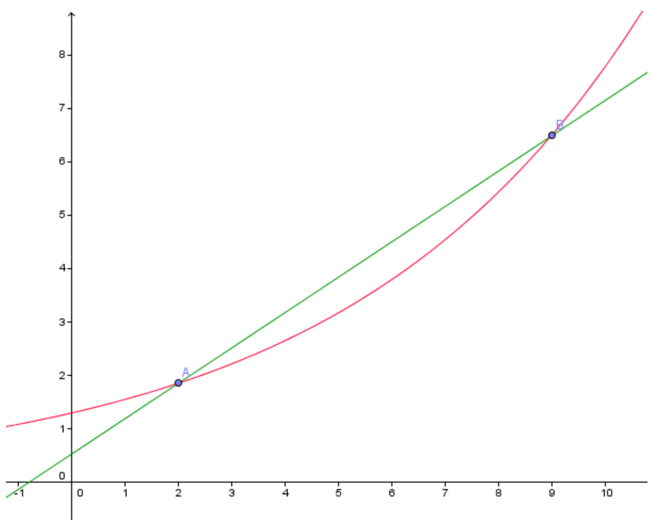


1. Tangente & Nombre dérivé

Dans toute cette section, on considère une fonction f, définie sur un intervalle I, et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Définition 1.1. Soient $a, b \in I$, avec $a \neq b$. On appelle *taux de variation* (ou parfois *taux d'accroissement*) de f entre a et b le quotient

$$\tau_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Les points A et B ont pour coordonnées $A(a; f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est exactement le coefficient directeur de la sécante (AB).

On cherche à savoir comment ce taux d'accroissement se comporte lorsque le point B se "rapproche" de plus en plus du point A. Il est alors intéressant d'oserver ce qui se passe avec un logiciel de géométrie dynamique. On représente néanmoins ci-après trois captures d'écran du logiciel *Geogebra.*

On constate que, plus le point B se rapproche de A, plus la sécante à la courbe (AB) tend à être **tangente** à la courbe au point d'abcisse a.

Ainsi, plutôt que de considérer le taux de variations de a à b, on va considérer celui de a à $a+h$ en prenant des valeurs de h de plus en plus proches de 0.

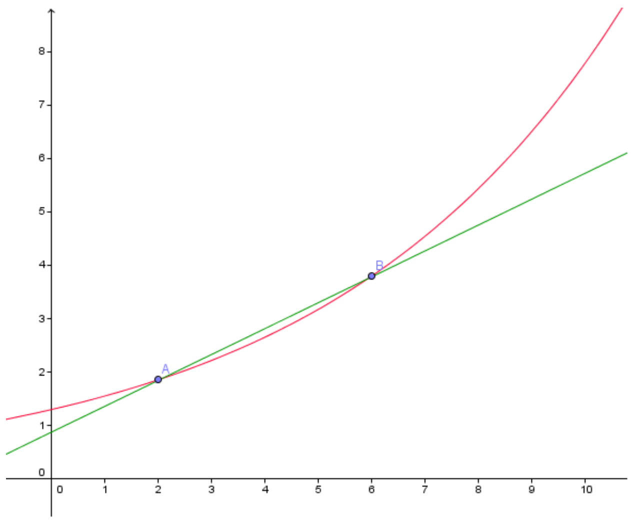
Définition 1.2. Supposons que pour des valeurs de h de plus en plus proches de 0 (mais toujours avec $h \neq 0$), les valeurs successives du taux d'accroissement

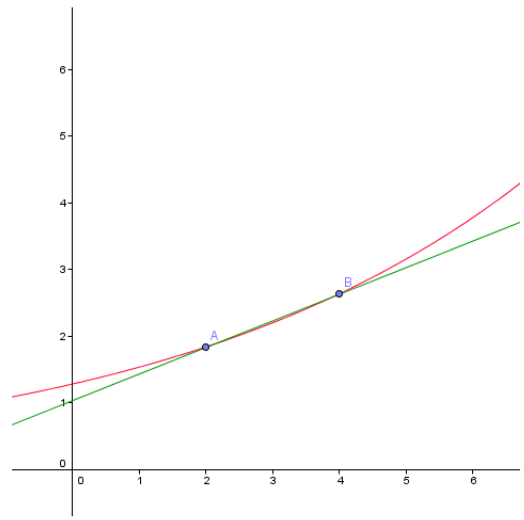
$$\tau_{a,a+h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

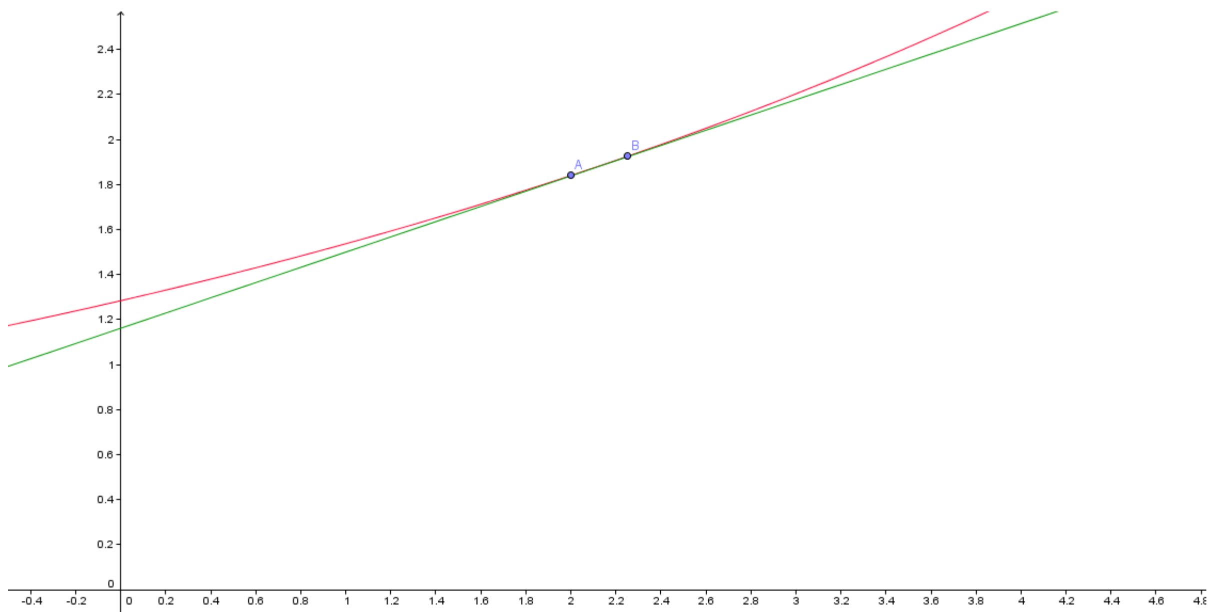
deviennent de plus en plus proches d'un certain nombre l.

On dit alors que la fonction f est **dérivable** au point a et que le nombre dérivée de f en a, que l'on note $f'(a)$ est l. On écrira

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$







Ce qu'il faut absolument retenir :

Lorsque la foncion f est dérivable en a, le nombre dérivé de f en a est en fin de compte **le coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Exercice 1.3. Dans un repère orthonormé (unité de longueur 2cm ou 2 grands carreaux), tracer laa courbe représentative de f, où $f(x) = x^2 - x + 1$. Que vaut $f(2)$? Calculer les taux de variations de f entre 2 et $2 + h$ en prenant successivement $h = 2$, $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.1$. Que peut-on conjecturer quant à la valeur de $f'(2)$? En représentant graphiquement la fonction f, puis à l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, vérifier cette conjecture.

Remarque 1.4. Il arrive qu'une fonction **ne soit pas dérivable** en un point. Par exemple, regardons la fonction $f : x \mapsto |x|$. Le point de coordonnées $(0;0)$ est ce qu'on appelle un point anguleux: il n'y a pas de tangente à la courbe en 0. De chaque côté du point, on a une demi-tangente et des deux demi-droites ont un coefficient directeur opposé. La fonction n'est pas dérivable en 0.

Comme autre exemple, on peut regarder la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 0. Le taux d'accroissement entre 0 et h devient de plus en plus grand (on dit qu'il tend vers $+\infty$) lorsque h se rapproche de 0. La fonction n'est donc pas dérivable en 0. En revanche, on constate que la courbe admet une tangente *verticale* en 0

Proposition 1.5. *Lorsque f est dérivable en x_0, la tangente T_{x_0} à la courbe de f au point d'abscisse x_0 a pour équation*

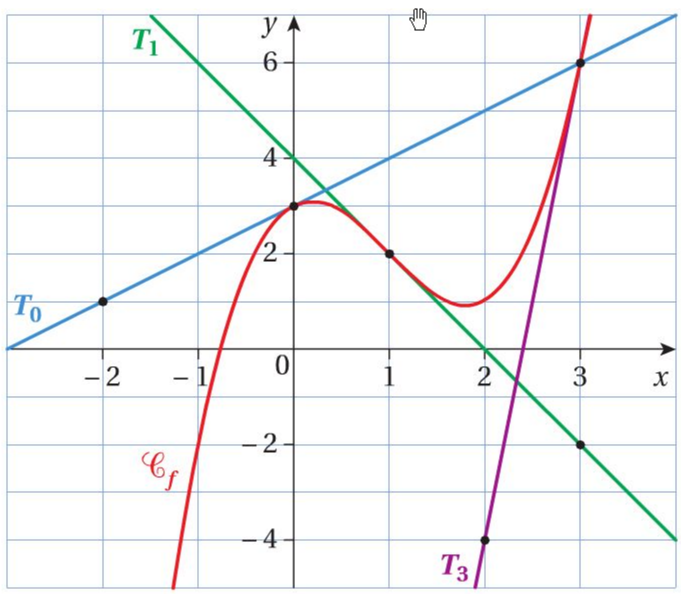
$$\begin{aligned} T_{x_0} : \quad y &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Proof. En effet, on sait déjà que le coefficient directeur de T_{x_0} est $f'(x_0)$ donc on peut écrire $y = f'(x_0)x + b$ et il reste à déterminer b. Comme la tangent en x_0 passe par le point d'abscisse x_0 (c'est la définition de la tangente), et que ce point a pour ordonnée $f(x_0)$, on peut injecter ces coordonnées dans l'équation de T_{x_0}, ce qui donne

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Longleftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

En factorisant par $f'(x_0)$, on retrouve bien l'équation ci-dessus. □

Exercice 1.6. On représente ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que trois tangentes à la courbe en certains points.



1. Déterminer, par lecture graphique, les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.
2. Déterminer, par lecture graphique, les valeurs de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. En déduire les équations réduites des tangentes T_0, T_1 et T_3.

Définition 1.7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable *en tout point* de I. Alors, la fonction

$$x \mapsto f'(x)$$

est appelée **fonction dérivée** de f et est notée f'.

L'objectif est alors de déterminer, lorsqu'une fonction f est dérivable, l'expression algébrique de sa fonction dérivée à partir de son expression algébrique. Pour les fonctions usuelles, c'est possible. Pour cela, on va utiliser les formules et résultats de la section suivante.

2. Dérivées des fonctions usuelles

Proposition 2.1. *(Dérivée d'une fonction constante)*
Si la fonction f est constante sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 0$.

Proof. En effet, la représentation graphique d'une fonction constante est une droite horizontale. En tout point, la tangente existe et est confondue avec la droie représentant f. Etant alors horizonale, son coefficient directeur est nul, et ceci est vrai partout, d'où le résultat. □

Proposition 2.2. *(Dérivée de la fonction $x \mapsto x$)*
La fonction $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 1$.

Proof. La courbe représentative de cette fonction est la droite d'équation $y = x$. En tout point, la tangente est confondue avec la droite et son coefficient directeur est partout égal à 1. □

Proposition 2.3. *(Dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$)*
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$.

Proof. Calculons le taux de variations entre un point $x \in \mathbb{R}$ et $x + h$ (pour $h \in \mathbb{R}$ se rapprochant de 0).

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2xh}{h} \\ &= 2x + h, \end{aligned}$$

ce qui se rapproche de $2x$ lorsque h se rapproche de 0. □

Proposition 2.4. *(Dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$)*
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Proof. Calculons le taux de variations entre un point $x \in \mathbb{R}$ et $x + h$ (pour $h \in \mathbb{R}$ se rapprochant de 0).

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{h\left(x^2 + xh\right)} \\ &= \frac{-1}{x^2 + xh}, \end{aligned}$$

ce qui se rapproche de $\frac{-1}{x^2}$ lorsque h se rapproche de 0. □

Les résultats suivants généralisent les formules précédentes. Les preuves en sont admises.

Proposition 2.5. *(Dérivée de $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$)*
La fonction $f : x \mapsto x^n$, pour n entier naturel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemple 2.6. Voyons ce que la formule précédente donne sur des exemples précis de puissances de x.

- $f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$
- $f(x) = x^4 \longrightarrow f'(x) = 4x^3$
- $f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^4$
- $f(x) = x^{30} \longrightarrow f'(x) = 30x^{29}$

Proposition 2.7. *(Dérivée de $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$)*
La fonction $f : x \mapsto x^n$, pour n entier négatif, est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

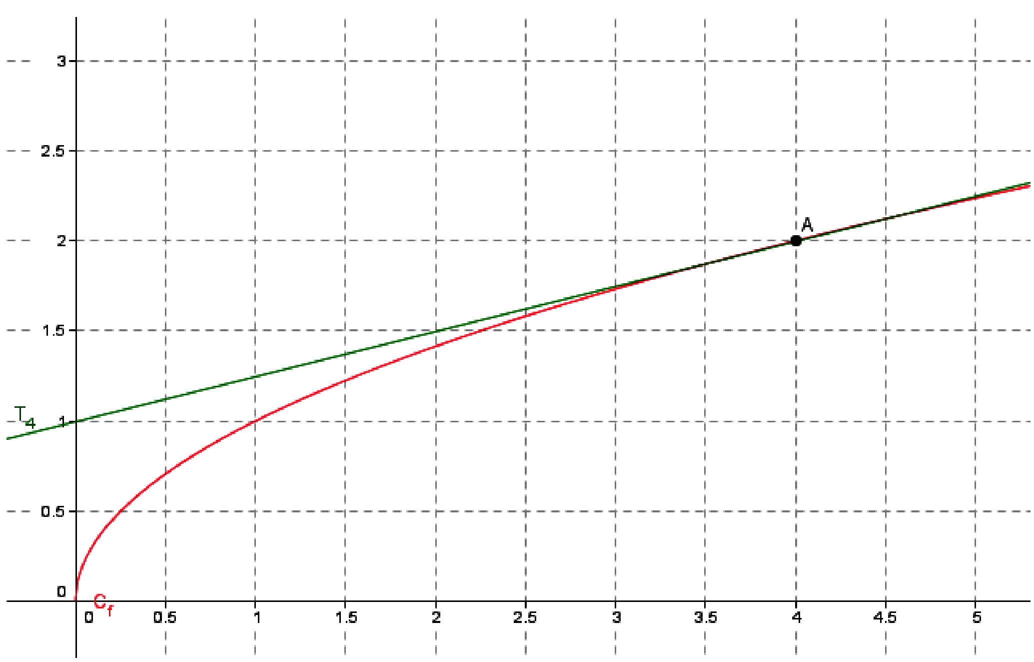
Remarque 2.8. Cette formule est en fait la même que pour des puissances positives. On fera cela dit bien attention au signe de l'exposant en passant de l'écriture fractionnaire à l'écriture sans la fraction.

Exemple 2.9. Voyons ce que la formule précédente donne sur des exemples précis de puissances de $\frac{1}{x}$.

- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow f'(x) = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \longrightarrow f'(x) = -2 \times x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
- $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \longrightarrow f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
- $f(x) = \frac{1}{x^{15}} = x^{-15} \longrightarrow f'(x) = -15x^{-16} = -\frac{15}{x^{16}}$

Proposition 2.10. *(Dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$)*
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, qui est définie sur $[0, +\infty[$, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 2.11. On représente ci-dessous la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Déterminer d'abord par le calcul, puis graphiquement, la valeur de $f'(2)$.



3. Opérations sur les dérivées

En appliquant les règles suivantes aux formules précédentes, on va pouvoir dériver beaucoup de fonctions, en particulier toutes les fonctions polynomiales ou bien fractions rationnelles.

Proposition 3.1. *(Dérivée d'une somme)*
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors, la fonction $f+g$ (qui à un élément x associe $f(x)+g(x)$) est encore dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Proposition 3.2. *(Dérivée du multiple d'une fonction par une constante)*
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante. Alors, la fonction αf (qui à un élément x associe $\alpha f(x)$) est encore dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

Corollaire 3.3. *(Dérivation des polynômes)*
Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme. Il découle de tous les résultats précédents que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

Exemple 3.4. Considérons la fonction polynôme

$$f(x) = 7x^4 - 5x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 2015x - \frac{1}{3}.$$

Cette fonction est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut calculer sa dérivée “terme à terme” puis en “recollant” les morceaux en multipliant par le bon coefficient. On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \times 4x^3 - 5 \times 3x^2 + \frac{1}{4} \times 2x + 2015 \times 1 - \frac{1}{3} \times 0 \\ &= 28x^3 - 15x^2 + \frac{1}{2}x + 2015. \end{aligned}$$

Autre exemple, la fonction polynôme g définie par

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^9 + \frac{4}{5}x^5 + x^2 - 25$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$g'(x) = -3x^8 + 4x^4 + 2x.$$

Proposition 3.5. *(Dérivation d'un produit)*
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors, la fonction fg (qui à un élément x associe $f(x)g(x)$) est encore dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Remarque 3.6. ⚠ On fera bien attention à comprendre la formule et à ne pas tomber dans le piège classique: $(fg)'(x) \neq f'(x)g'(x)$!

Exemple 3.7. Soit $h(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$. Cette fonction, qui est définie sur $[0; +\infty[$, est le produit de deux autres fonctions, f et g, où $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont bien dérivables sur $]0;+\infty[$ et d'après la proposition précédente, on a que h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2x \times \sqrt{x} + (x^2+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2 + 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Exercice 3.8. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser où elles sont dérivables et la valeur de la dérivée.

1. $f(x) = (4x^2 + 3x - 1)(5 - 2x)$
2. $g(x) = (3x^2 - x + 2)\sqrt{x}$

Proposition 3.9. *(Dérivée de l'inverse)*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et qui ***ne s'annule pas sur*** *I. Alors, la fonction $\frac{1}{f}$ est encore dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Exemple 3.10. On considère la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$ car -3 et 1 sont les deux racines du polynôme du second degré qui est au dénominateur. D'après la proposition précédente, g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$, on a

$$g'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}.$$

La formule précédente est en fait un cas particulier de la proposition suivante.

Proposition 3.11. *(Dérivée d'un quotient)*
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et telles que g ne s'annule pas sur I. Alors, la fonction $\frac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Remarque 3.12. En appliquant cette formule avec $f(x) = 1$, on retrouve la formule qui donne la dérivée de l'inverse de g.

Exemple 3.13. Soit

$$h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{5 - 2x}.$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$. Les deux fonctions $f(x) = x^2 + x - 6$ et $g(x) = 5 - 2x$ sont également définies et dérivables sur ce même ensemble. Ainsi, h y est dérivable et on a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x+1)(5-2x) - (x^2+x-6)(-2)}{(5-2x)^2} \\ &= \frac{10x - 4x^2 + 5 - 2x + 2x^2 + 2x - 12}{(5-2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x - 7}{(5-2x)^2}. \end{aligned}$$

Il est plus pratique de laisser le dénominateur sous la forme la plus factorisée possible. On verra en effet plus tard que nous nous interesserons au signe de la dérivée et qu'il est donc utile d'avoir une expression de celle-ci qui permette d'obtenir le signe le plus facilement possible. Ainsi, on ne développe que rarement le dénominateur.

Maintenant que l'on sait dériver des fonctions, nous allons appliquer ces méthodes de calcul à l'étude de ces fonctions.

4. Application: Etude de fonctions

Connaître la dérivée d'une fonction, lorsque celle-ci est dérivable, va nous donner des informations importantes sur son comportement. Plus précisement, le signe de la dérivée nous donnera le sens de variation de la fonction. C'est l'objet du résultat suivant dont la preuve est admise.

Théorème 4.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*
(i) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I;
(ii) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I;
(iii) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple 4.2. (Variations d'une fonction trinôme)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme, définie sur $\mathbb{R}$. On va voir que le résultat précédent nous permet de retrouver les résultats, déjà énoncés sans preuve dans le chapitre sur le *Second Degré.*

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a, pour tout x réel, $f'(x) = 2ax + b$, qui s'annule pour $x = -b/2a$. Lorque l'on veut dresser le tableau de signes de $f'(x)$, on doit différencier deux cas, suivant le signe de a.

1. Supposons d'abord que $a > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Si maintenant $a < 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$	$-\infty$

C'est exactement ce que l'on savait déjà!

Exemple 4.3. Etudier la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule sa dérivée, grâce au formulaire que l'on connait déjà par coeur:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

Il faut alors trouver le signe de $f'(x)$, qui est un trinôme du second degré. Nous savons donc trouver son signe, via le calcul du discriminant et la méthode développée au chapitre correspondant. On trouve que ce trinôme admet les deux racines

$$x_1 = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1$$

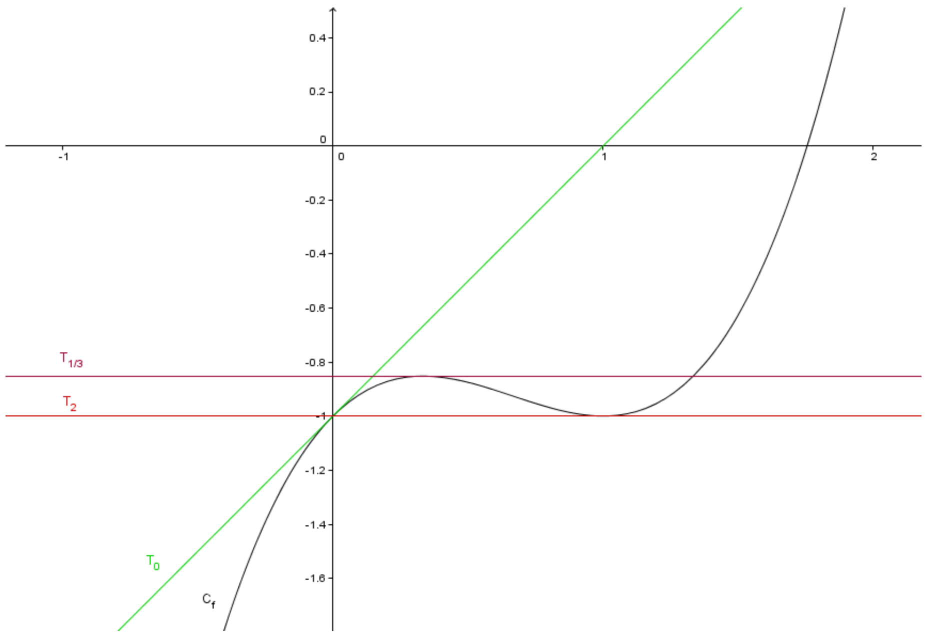
et se factorise $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$. On peut donc dresser le tableau de signes de $f'(x)$ dont on déduit immédiatement le tableau de variations. On voit que $f(\frac{1}{3}) = \frac{-8}{9}$ et $f(1) = -1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-8}{9}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On peut maintenant dessiner la courbe! Afin d'obtenir une courbe la plus précise possible, on fera apparaître les deux tangentes horizontales (là où la dérivée s'annule). On peut aussi (c'est parfois explicitement demandé) faire apparaître d'autres tangentes qui donnent une information supplémentaire quant à la vitesse de croissance (ou décroissance) de la courbe à tel ou tel endroit. Ici, on peut par exemple ajouter la tangente en 0.

$$\begin{aligned} T_0 : \quad y &= f'(0)x + f(0) \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

On obtient:



Exercice 4.4. (Pollution)

Deux usines A et B distantes de 6000 mètres émettent des particules polluantes. L'usine A en émet deux fois plus que l'usine B. On suppose que la pollution en un point est inversement proportionnelle à la distance de ce point à la source de pollution. On veut trouver en quel point du segment $[AB]$ la pollution est la plus faible.

1. On considère un point M de $[AB]$ et on note $AM = x$. Faire un dessin. On note Q la quantité de particules polluantes émises par l'usine B, à la sortie de cette même usine. Montrer que la quantité de particules polluantes en M est égale à

$$f(x) = Q \times \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{6000 - x}\right).$$

2. En étudiant la fonction f, répondre à la question initiale.

Exercice 4.5. (Livre de maths)

Pour la réalisation d'un livre de maths, un maquettiste souhaite laisser sur chaque page deux marges de 2 cm à gauche et à droite, et 3 cm en haut et en bas. On appelle x la largeur et y la longueur de la page entière (en cm).

1. *a*) A quels intervalles x et y appartiennent ils ? Justifier.

b) Exprimer en fonction de x et de y l'aire de la surface imprimable.

c) Le maquettiste souhaite que la surface imprimable ait une aire de 350cm^2. Exprimer alors y en fonction de x.

d) En déduire l'expression de l'aire de la page entière en fonction de x uniquement.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{6x^2+326x}{x-4}$ sur $]4; +\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f (on dressera le tableau de variations).

b) Pour minimiser les coûts, le maquettiste doit choisir le format de page qui utilise le moins de papier, tout en respectant les contraintes décrites précédemment. Calculer les dimensions des pages qu'il va utiliser.