Année 2014-2015 - Première ES
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

EXERCICES : LOI BINOMIALE & ECHANTILLONNAGE

1. Loi Binomiale

Exercice 1.1. (Smartphones)
Dans un grand établissement scolaire, 20% des élèves possèdent un smartphone. On rencontre trois élèves au hasard.
1. Quelle est la probabilité que chacun des trois élèves possède un smartphone?
2. Quelle est la probabilité qu'un seul des trois possède un smartphone?

Exercice 1.2. (Dés)
On lance huit dés cubiques non truqués (et dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Utiliser la calculatrice pour répondre aux questions suivantes.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois faces numérotées 1?
2. Quelle est la probabilité que cinq des faces soient supérieures ou égales à 2?

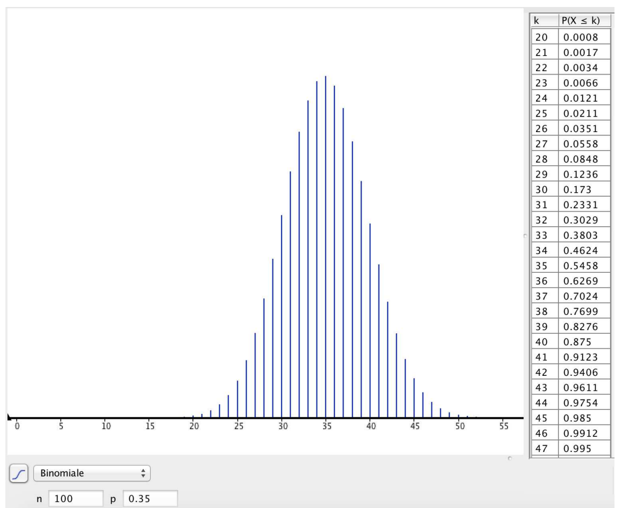
Exercice 1.3. (Alcootest)
Dans le but de contrôler le taux d'alcoolémie des conducteurs automobiles, la police procède à un alcootest. On admet que 2% des conducteurs contrôlés sont en infraction.
La police contrôle n personnes. On assimile ce contrôle à un tirage avec remise et on suppose les résultats indépendants les uns des autres.
1. Exprimer en fonction de n la probabilité de trouver au moins une personne en infraction.
2. Calculer le nombre minimal N de personnes à contrôler pour que la probabilité de trouver au moins une personne en infraction soit supérieure à $0,95$. (*On pourra utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.*)

Exercice 1.4. (Problèmes de maintenance)
Une machine à commandes numériques de haute technologie est installée dans une usine. Une société en assure la maintenance. Lorsqu'une panne survient, un technicien doit se déplacer une fois sur cinq. Le reste du temps, une assistance téléphonique suffit.
1. Soit X la variable aléatoire qui compte, sur quatre pannes, le nombre de fois où le technicien doit se déplacer. Quelle est la loi suivie par X?
2. Pour l'entreprise de maintenance, un déplacement revient à 400€ et une assistance téléphonique revient à 30€. Le responsable de l'usine demande un forfait "dépannage" pour quatre pannes.
a) Quel doit être le montant minimal de ce forfait pour que l'entreprise de maintenance puisse espérer ne pas perdre d'argent?
b) Sans beaucoup de calculs, sauriez-vous retrouver ce résultat?

Exercice 1.5. (Gestion de stock)
350 personnes assistent à un spectacle. A l'entracte, une boisson gratuite est proposée: un soda ou bien un jus de fruits. Lors des spectacles précédents, il a été constaté que 40% des personnes consommaient un soda.
On voudrait répondre à la question suivante: "Quel stock minimal l'organisateur doit-il prévoir pour que la probabilité de manquer de sodas soit inférieure à $0,1$?"
1. Soit X la variable aléatoire qui compte, sur les 350 spectateurs, le nombre d'entre eux qui prennent un soda.
a) Quelle est la loi suivie par X? Préciser ses paramètres.
b) A l'aide du mode TABLE de votre calculatrice, déterminer la valeur du plus petit entier naturel n tel que $P(X > n) < 0,1$.
c) Répondre alors à la question initiale.
2. Répondre à la même question mais en voulant que le risque de manquer de sodas soit inférieur à 1%.
3. José, qui ne comprend pas ces calculs, dit alors "Il y a 350 personnes et 40% d'entre elles prennent un soda, ce qui représente 140 sodas, il suffit d'en prendre donc ce nombre là!".
Quel risque prendrait-on en écoutant José?

2. Echantillonnage

Exercice 2.1. Josette trouve difficile la méthode proposée en classe de Première pour obtenir l'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil 95% et se plaint:
"En Seconde, il suffisant de calculer la racine de l'effectif, de prendre l'inverse et de le soustraire ou de le rajouter à la probabilité théorique pour avoir l'intervalle. Maintenant c'est beaucoup plus compliqué...".
On cherche donc à convaincre Josette de l'amélioration apportée par cette nouvelle méthode. On prend pour exemple $p = 0,35$ et $n = 100$.
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil 95% avec la méthode apprise en Seconde.
2. Pour les questions suivantes, on utilise la figure ci-dessous, obtenue avec *GeoGebra*. X suit la loi $\mathcal{B}(100, 0.35)$.
   a) Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0.025$;
   b) Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \leq 0.975$;
   c) En déduire l'intervalle de fluctuation cherché.
3. Que peut-on alors dire à Josette?



k	P(X ≤ k)
20	0.0008
21	0.0017
22	0.0034
23	0.0066
24	0.0121
25	0.0211
26	0.0351
27	0.0558
28	0.0848
29	0.1236
30	0.173
31	0.2331
32	0.3029
33	0.3803
34	0.4624
35	0.5458
36	0.6269
37	0.7024
38	0.7699
39	0.8276
40	0.875
41	0.9123
42	0.9406
43	0.9611
44	0.9754
45	0.985
46	0.9912
47	0.995

(On aurait pu aussi utiliser la calculatrice ou le tableur.)

Exercice 2.2. (Des gauchers dans la classe)
Dans le monde, parmi les personnes sachant écrire, le pourcentage de celles qui écrivent de la main gauche est 12%.
1. Dans une classe de 35 élèves, en comptant aussi le professeur, quel est l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des personnes écrivant de la main gauche? (*On utilisera la calculatrice.*)
2. La classe de 1ES2, en mathématiques, est-elle conforme, au risque 5% au pourcentage annoncé?

3. Exercices de synthèse

Exercice 3.1. (Loi binomiale, Second degré & Maximum d'une fonction)
Une urne contient une proportion de p boules rouges. On tire dans cette urne quatre boules avec remise.
X est la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues.
1. Quelle est la loi de probabilité de X?
2. Calculer, en fonction de p la valeur de $P(X = 2)$.
3. Déterminer p pour que $P(X = 2) = \frac{8}{27}$.
4. Déterminer p pour que $P(X = 2)$ soit maximal.

Exercice 3.2. (Loi binomiale & Suites)
On lance trois fois consécutives un dé classique, non truqué, à six faces.

1. On note A l'évènement "les évenements, dans l'ordre de sortie, sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique stricement croissante". On note r la raison d'une telle suite.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour r?
   b) Déterminer toutes les suites réalisant l'évènement A.
   c) Montrer que $P(A) = \frac{1}{36}$.
2. On répète dix fois l'expérience. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où A est réalisé.

a) Quelle est la loi de X?
b) Calculer $P(X = 2)$.
c) A l'aide de la calculatrice ou du tableur, déterminer la valeur de X la plus probable.
d) A l'aide de la calculatrice ou du tableur, déterminer le plus petit entier m tel que $P(X \leq m) > 0.99$.

4. On revient à l'expérience initiale. Déterminer la probabilité de l'évènement B "les résultats, dans l'ordre de sortie, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique strictement décroissante".

5. Montrer que $P(A \cup B) = \frac{7}{216}$.

Appendice: Calculatrice et loi Binomiale

Supposons que X soit une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Les calculatrices graphiques permettent de calculer aussi bien $P(X = k)$ que $P(X \leq k)$.

Sur *Casio 35+*

Dans n'importe quel menu (RUN, STAT, TABLE...) on peut appeler la loi binomiale en faisant:
OPTN $>$ STAT $>$ DIST $>$ BINM
Ensuite, "Bpd" permettra de calculer $P(X = k)$ et "Bcd" $P(X \leq k)$ avec la syntaxe suivante (notamment la valeur de la variable arrive avant ses paramètres):

$$P(X = k) = \texttt{BinomialPD}(k, n, p) \qquad \text{et} \qquad P(X \leq k) = \texttt{BinomialCD}(k, n, p).$$

Sur *Texas Instruments TI82*

On obtient le menu des distributions des lois de probabilités en faisant:
2nde $>$ DISTR
Ensuite, "A:binompdf(" permettra de calculer $P(X = k)$ et "B:binomcdf(" $P(X \leq k)$ avec la syntaxe suivante :

$$P(X = k) = \texttt{binompdf}(n, p, k) \qquad \text{et} \qquad P(X \leq k) = \texttt{binomcdf}(n, p, k).$$