Année 2014-2015 - Première ES
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

CHAPITRE 7 : PROBABILITÉS & VARIABLES ALÉATOIRES

1. Rappels

Nous avons rappelé en classe le vocabulaire des probabilités et les méthodes de calculs introduites en classe de Seconde. Néanmoins, voici quelques exercices interessants qu'il est important de maîtriser.

Exercice 1.1. (Evènements contraires)

1. Une urne contient quatre boules vertes et trois boules bleues. On tire simultanément trois boules.

a) On note A l'évènement "les trois boules sont vertes". L'évènement $\overline{A}$ est-il "aucune boule n'est verte" ou bien "au moins une boule n'est pas verte" ?

b) On note B l'évènement "une boule au plus est verte"? L'évènement $\overline{B}$ est-il "il y a deux boules vertes ou trois boules vertes" ou bien "aucune n'est verte ou deux sont vertes ou trois sont vertes" ?

2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Enoncer, en français, les évènements contraires des évènements suivants:

a) "On obtient un trèfle"

b) "On obtient un roi ou une dame"

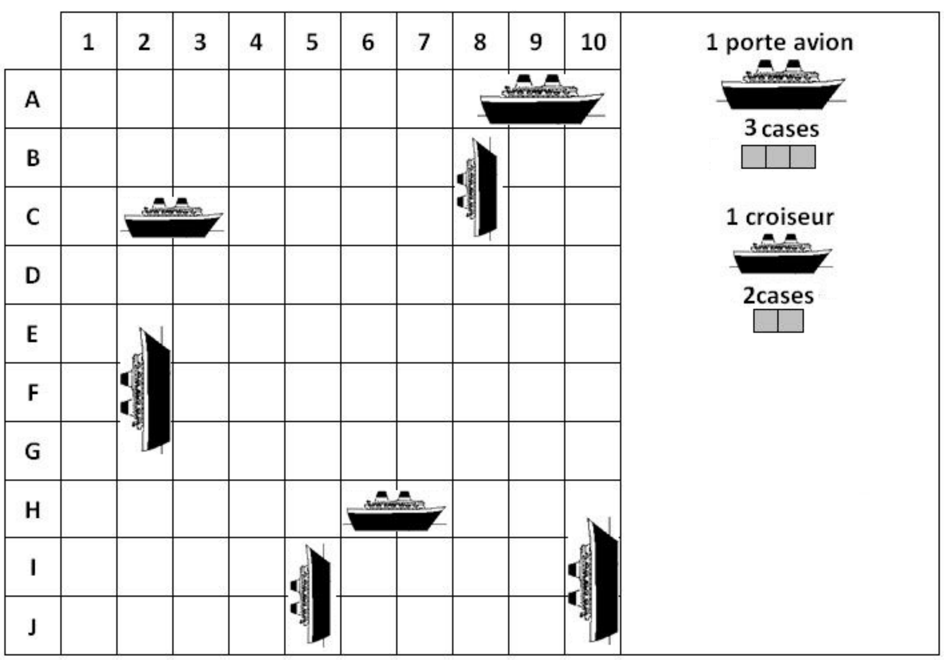
3. On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Enoncer, en français, les évènements contraires des évènements suivants:

a) "On obtient au moins un as"

b) "Toutes les cartes sont des coeurs".

Exercice 1.2. (Bataille navale)

Sur la grille sont disposés des bateaux. Pour un tir, l'adversaire choisit une case au hasard.



1. Calculer les probabilités des évènements:

A : "L'adversaire touche un bateau";

B : "L'adversaire touche un porte-avions";

C : "L'adversaire ne touche aucun bateau".

2. Ecrire à l'aide des symbole $A, B, \overline{A}, \overline{B}, \cap, \cup$ l'évènement "l'adversaire touche un croiseur". Calculer la probabilité correspondante.

3. L'adversaire ne décide de tirer que dans les colonnes 4,5 et 6. Quelle est la probabilité de toucher un bateau? Quelle est celle de toucher un porte-avions?

4. On suppose que l'adversaire touche le croiseur en $H6$, pour la première fois. Le joueur annonce donc alors "Croiseur touché". L'adversaire étant supposé intelligent, quelle est la probabilité qu'il coule le croiseur au second coup?

Exercice 1.3. (Distributeur de boissons)

Dans le hall d'une gare, il y a deux distributeurs de boissons. On note A l'évènement "le premier distributeur fonctionne" et B l'évènement "le second distributeur fonctionne". On sait qu'il y a toujours au moins un des deux distributeurs qui fonctionne et de plus, il a été établi que

$$P(A) = 0,75 \text{ et } P(B) = 0,65.$$

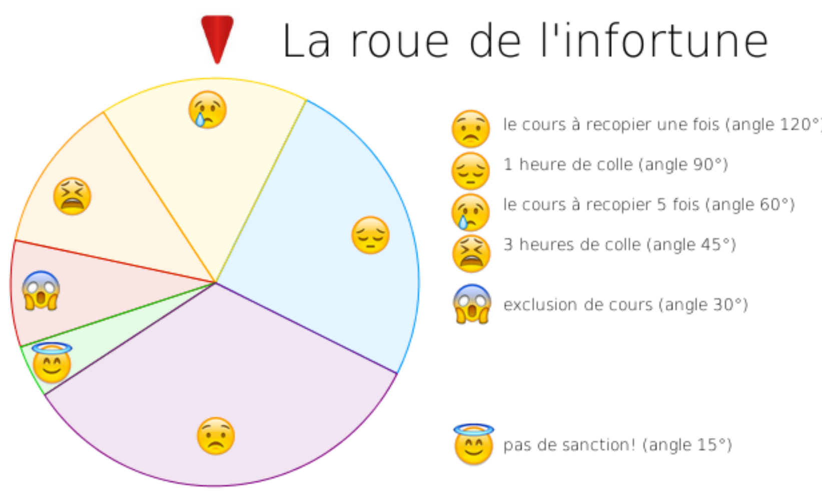
1. Utiliser les notations $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ et les symboles $\cap, \cup$ pour décrire les évènements suivants:
E :"Les deux distributeurs fonctionnent";
F :"Au moins un des deux distributeurs fonctionne";
G :"Aucun des deux distributeurs ne fonctionne".

2. Calculer les probabilités des évènements E, F et G.

Exercice 1.4. (La roue de l'infortune)

Un professeur, dont la classe de Première est extrêmement bavarde, a décidé de sévir. Afin de choisir les sanctions qu'il attribuera aux élèves qui ne sont pas sages, il décide de créer une roue, pourvue d'un curseur, qu'il fera tourner. En fonction du secteur de la roue qui se trouvera sous le curseur au moment où celle-ci s'arrête, l'élève récoltera une punition différente.

Dans son extrême clémence, l'enseignant décide de laisser une chance à l'élève en intégrant un secteur sans punition. La roue est la suivante:



1. Calculer les probabilités de chacun des évènements élémentaires.

2. On considère l'évènement A : "l'élève reçoit une ou plusieurs heures de colles". Calculer $P(A)$ et $P(\overline{A})$.

3. Un petit groupe de 4 élèves est particulièrement bavard. Le professeur tourne donc la roue pour chacun de ces quatre perturbateurs. Quelle est la probabilité qu'aucun ne soit puni? Quelle est la probabilité qu'au moins un élève soit exclu? Que deux élèves soient exclus?

Exercice 1.5. (Second degré et probabilités)

Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{5}x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Quel est son minimum ?

Dans une urne, il y a 10 boules. Parmi ces boules, n sont oranges et les autres sont vertes. On tire successivement, **avec remise**, deux boules de l'urne.

3. Combien y a-t-il de boules vertes?
4. Quelle est, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule orange au premier tirage?
5. Représenter l'arbre modélisant cette expérience.
6. Calculer la probabilité, en fonction de n, de l'évènement A : "les deux boules ont la même couleur".
7. A l'aide de la Partie 1., montrer que, quelque soit le nombre de boules oranges, on a toujours au moins une chance sur deux d'avoir deux boules de même couleur.

2. Variables Aléatoires

2.1. **Activité d'introduction: notion de variable aléatoire.** On lance un dé non pipé. On gagne 5 euros si le 6 sort, on perd 2 euros si le 1 sort et on perd 1 euros dans les autres cas. On associe à chacun des six chiffres le gain (positif ou négatif) correspondant. On peut alors représenter cette association de la manière suivante:

$$X(1) = -2; \qquad X(2) = -1; \qquad X(3) = -1; \qquad X(4) = -1; \qquad X(5) = -1; \qquad X(6) = 5.$$

On dit qu'on a défini une *variable aléatoire* X.
a) Calculer la probabilité que X soit égale à 5. On la note $P(X = 5)$.
b) De même, calculer $P(X = -1)$ et $P(X = -2)$. Recopier et compléter le tableau suivant

a	-2	-1	5
$P(X = a)$			

On dit que ce tableau définit complètement la *loi de X*.
c) Calculer la moyenne des gains, pondérée par les probabilités d'apparition de chaque valeur. On note cette moyenne $E(X)$ et on l'appelle *espérance de X*.

2.2. **Définition(s).**

Définition 2.1. Lorsqu'à chaque issue de l'univers correspondant à une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit qu'on définit une *variable aléatoire.* Ainsi une variable aléatoire est en fait une application, souvent notée X (ou avec une autre lettre majuscule)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire est noté $X(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. On note $(X = a_j)$ l'évènement "X prend la valeur a_j".

Définition 2.2. Lorsqu'à chaque valeur a_j de $X(\Omega)$ on associe la probabilit $P(X = a_j)$, on dit qu'on définit la *loi de probabilité* de X. On la représente sous forme de tableau

a	a_1	a_2	...	a_k
$P(X = a)$	p_1	p_2	...	p_k

Il est important de bien remarquer que la somme des éléments de la deuxième ligne vaut naturellement 1:

$$p_1 + p_2 + ... + p_k = 1.$$

Exercice 2.3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Chaque as vaut 4 points, chaque roi 3 points, chaque dame 2 points et chaque valet 1 point. Les autres ne rapportent pas de point. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au nombre de points obtenus.

Exercice 2.4. On tire au hasard une boule dans une urne qui contient 15 boules blanches, 5 boules rouges et 10 boules vertes. Suivant la couleur de la boule obtenue, on marque respectivement 1, 2 ou 3 points. X est la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus après un tirage. Le tableau suivant donne-t-il la loi de X? Justifier.

a	1	2	3
$P(X = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Exercice 2.5. Une classe organise une loterie. 100 billets numérotés de 1 à 100 sont vendus chacun au prix de 4 euros. Les acheteurs ne voient pas les numéros sur leur billet. Il est annoncé qu'un billet dont le numéro se termine par 5 gagne 10 euros, qu'un billet dont le numéro commence par 6 gagne 20 euros et que tout billet gagnant est remboursé.

1. Quelle somme maximale peut-on gagner en participant à ce jeu (et en achetant un seul billet)?

2. On considère la variable aléatoire X correspondant au gain d'un joueur achetant un unique billet de loterie. Donner la loi de X.

2.3. Espérance mathématique.

Définition 2.6. Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. On appelle *espérance de* X la moyenne des valeurs prises par X pondérée les probabilités d'apparition de chaque valeur:

$$E(X) = a_1 \times P(X = a_1) + a_2 \times P(X = a_2) + ... + a_k \times P(X = a_k).$$

Exemple 2.7. Un jeu gratuit consiste à lancer une pièce bien équilibrée. Si "pile" apparaît, le joueur gagne 2 euros; si "face" apparaît, il ne gagne rien. Notons alors G la variable aléatoire correspondant au gain d'un joueur. Le jeu ne coûtant rien, les deux valeurs possibles pour G sont 0 ou 2 (ce qui signifie que $G(\Omega) = \{0, ; 2\}$). La pièce étant équilibrée, chacun des deux évènements élémentaire est équiprobable. On peut donc dresser le tableau correspondant à la loi de G:

a	0	2
$P(G = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Le gain moyen, c'est à dire l'espérance de G, vaut alors

$$E(G) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

En "moyenne", le joueur va gagner 1 euro. Ce jeu est donc *favorable* au joueur. Il n'est pas *équitable*. Pour qu'un jeu soit équitable, il faut que l'espérance soit nulle. Essayons de déterminer le prix de la partie pour que ce jeu devienne équitable. Soit x le prix de la partie. Le gain est alors modifié; sachant qu'on dépense x euro pour jouer, on a $G(\Omega) = \{-x; 2 - x\}$ et la loi est alors donnée par

a	$-x$	$2 - x$
$P(G = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ceci donne une espérance qui vaut

$$E(G) = -x \times \frac{1}{2} + (2 - x) \times \frac{1}{2} = \frac{2 - 2x}{2} = 1 - x.$$

Si on veut que le jeu soit équitable, il faut que $E(G) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$, c'est à dire qu'il faut faire payer la partie 1 euro.

Exercice 2.8. (Roulette)

A la roulette, on peut miser la somme de son choix sur un numéro de 0 à 36. Si le numéro misé sort, le joueur récupère sa mise plus 35 fois celle-ci; sinon, il perd sa mise. Mari mise 10 euros sur le 17. On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Mari.

1. Donner la loi de G.

2. Quelle somme Mari peut-elle espérer gagner à chaque fois qu'elle misera 10 euros?

Exercice 2.9. Déterminer le gain moyen lors de la participation d'une personne à la loterie de l'exercice 2.5.

Exercice 2.10. (*Trinôme aux coefficients aléatoires)

On jette trois fois successives un dé à six faces et on note respectivement a, b, c les trois résultats obtenus. On définit alors le polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Soit alors X le nombre de racines réelles distinctes de Q. Déterminer la loi de X puis son espérance.