Année 2014-2015 - Première ES
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

CHAPITRE 5 : SUITES

Ce chapitre introduit la notion de *suite* et présente les propriétés de deux types de suites particulières: arithmétiques et géométriques.

Activité d'introduction : Placements avec intérêts

José dispose, après les fêtes de fin d'année, d'une somme d'argent d'un montant de 3000 euros.

Au 1er Janvier de cette nouvelle année 2015 qui commence, voulant suivre ses bonnes résolutions, il décide, plutôt que de consommer tout de suite cet argent, de le "placer" sur un compte d'épargne. C'est à dire de le "prêter" à sa banque moyennant l'octroi d'une rémunération de la part de celle-ci, appelée **intérêt.**

Son banquier lui propose alors deux possibilités;

- Selon la première, que l'on nommera option A, , il touchera, chaque année, 4% de la somme initialement investie. Ce procédé s'appelle placement à *intérêts simples*: les intérêts progressivement gagnés ne sont pas porteurs d'intérêts, la somme versée est la même chaque année.
- Selon la seconde, nomée option B, au contraire, à chaque début d'année, José touchera 3,7% du capital total ayant passé l'année précédente sur le compte. Ce placement s'appelle placement à *intérêts composés.*

1. Calculer, en faisant apparaître clairement les étapes, les sommes d'argent à disposition au 1er Janvier des années 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 et 2020 pour chaque alternative. Regrouper tous ces résultats dans le tableau ci-dessous:

1er Janvier de l'Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Capital selon l'option A						
Capital selon l'option B						

2. Quelle option semble la plus judicieuse pour José s'il veut récupérer son argent au plus tard en Janvier 2020 ?

3. Appelons a_n le capital (selon l'option A) à disposition au 1er Janvier de la n-ième année (par exemple a_0 sera pour 2015 et a_3 pour 2018). Quelle relation relie a_1 et a_0, a_2 et a_1 ou plus généralement a_{n+1} et a_n (c'est à dire le capital à disposition une année avec celui de l'année d'avant) ?

4. Même question avec b_n le capital (selon l'option B) au 1er Janvier de la n-ième année.

5. Quelle option suggérez vous José s'il ne veut pas récupérer son argent avant Janvier 2021 ?

On vient de définir deux *suites* (a_n) et (b_n). L'une est appelée suite arithmétique et l'autre suite géométrique. Ces définitions seront énoncées plus précisément un peu plus loin dans ce chapitre.

1. Suites : Premières définitions

Définition 1.1. On appelle *suite de terme général* u_n la liste ordonnée composée des nombres $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ On note cette suite (u_n) ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou parfois simplement u. Les valeurs u_i sont appelées *termes* de la suite.

Remarque 1.2. Il faut bien différencier (u_n) qui représente la suite et donc l'ensemble de toutes les valeurs de la liste et u_n qui est le nombre de la liste à la position n. On appelle d'ailleurs u_n terme de *rang* n.

De plus, il peut arriver qu'une suite de commence pas au rang 0 mais au rang 1, auquel cas le premier terme sera u_1.

Exemple 1.3. On considère la suite (u_n) formée des nombres pairs. On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, ...

On constate que *plus généralement*, $u_n = 2 \times n = 2n$. Cette “formule” qui s'appelle *expression du terme général* permet en fait de calculer n'importe quel terme de la suite, c'est à la dire le terme de la liste à n'importe quel rang. Par exemple $u_{29} = 2 \times 29 = 58$ ou encore $u_{307} = 2 \times 307 = 614$.

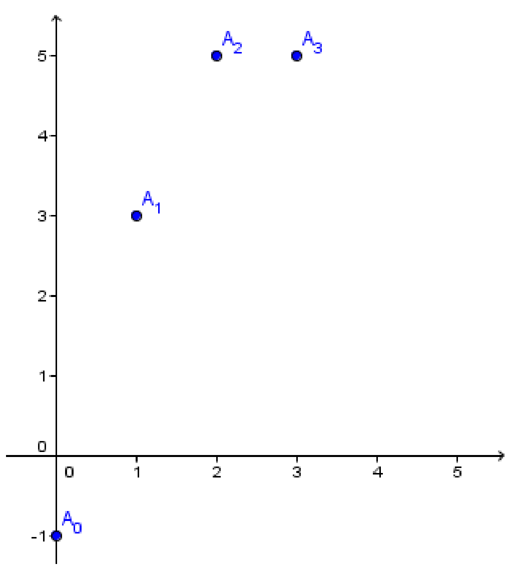
Exercice 1.4. On considère la suite (v_n) formée des nombres impairs. Après avoir calculé les quatre premiers termes, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n. En déduire la valeur du terme de rang 254.

1.1. Suite définie “en fonction de n”.
Connaître l'expression du terme général d'une suite permet de calculer n'importe quel terme et présente donc un réel intérêt. Parfois, la suite est *définie* directement par l'expression de son terme général.

Exemple 1.5. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = -n^2 + 5n - 1, \quad n \geq 0.$$

Le “$n \geq 0$” signifie que l'on part de $n = 0$ comme rang pour le premier terme. On calcule directement $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 5$... Mais on peut également calculer par exemple $u_{30} = -751$.

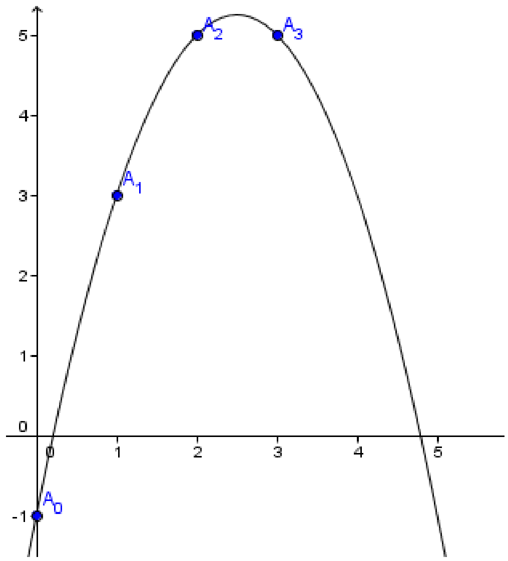


On peut représenter **graphiquement** certains termes de la suite, ce qui permet de représenter le comportement de celle-ci.

Dans cet exemple, on a placé des points correspondants aux quatre premiers termes de la suite.

Pour chaque valeur de n, le point A_n a pour coordonnées $(n; u_n)$.

Si f est une fonction, définie sur $[0, +\infty[$, telle que, pour toute valeur de n, on ait $u_n = f(n)$ alors, on peut aussi tracer la courbe de f.



L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse n est exactement u_n.

La courbe ci-contre est celle de la fonction f, définie par $f(x) = -x^2 + 5x - 1$. Elle passe bien par les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

On peut alors, par exemple, déduire graphiquement que $u_4 = 3$ et que $u_5 = -1$.

Exercice 1.6. Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre permiers termes de la suite, à partir de l'expression du terme général en fonction de n, puis représenter graphiquement les points correspondants.

a) $u_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad n \geq 0.$
b) $v_n = 2^n + n, \quad n \geq 0.$
c) $w_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$

1.2. **Suite définie par récurrence.** Il peut également arriver que la suite (u_n) ne soit pas définie directement en fonction de n mais que le calcul d'un terme dépende du terme précédent. On dit alors que la suite est définie *par récurrence.*

Connaissant le premier terme de la suite et la règle permettant de passer d'un terme au suivant, on peut calculer, de proche en proche, tous les termes.

Avec cette définition, le calcul d'un terme nécessite le calcul préalable de tous les termes précédents, ce qui peut s'avérer pénible lorsqu'on s'intéresse à un terme de rang élevé.

Remarque 1.7. ⚠ Il est très important de comprendre que u_{n+1} est le terme qui suit u_n et n'est pas du tout la même chose que $u_n + 1$!

Exemple 1.8. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On peut alors calculer $u_1 = -2u_0 + 3 = 3$, $u_2 = -2u_1 + 3 = -2 \times 3 + 3 = -3$, $u_3 = -2u_2 + 3 = -2 \times (-3) + 3 = 9$... Mais si on veut calculer u_{17}, il faut calculer les dix-sept termes précédents!

Exercice 1.9. Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre permiers termes de la suite, à partir de la relation de récurrence, puis représenter graphiquement les points correspondants.

a) $u_{n+1} = nu_n, \quad u_0 = -2.$
b) $v_{n+1} = \frac{v_n}{3} + 2, \quad v_0 = 6.$
c) $w_{n+1} = (-1)^n w_n + 5, \quad w_0 = 2.$

Exercice 1.10. (Suite de Fibonacci)

On considère la suite (f_n), appelée *suite de Fibonacci*, définie par

$$\begin{cases} f_0 & = 0 \\ f_1 & = 1 \\ f_{n+2} & = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Calculer les dix premiers termes de la suite (f_n). On introduit alors une autre suite, notée (ϕ_n) définie par

$$\phi_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n \geq 1.$$

Calculer les huit premiers termes de la suite (ϕ_n). Que pouvez-vous conjecturer ?

2. Sens de Variation

On a maintenant envie de s'intéresser au *comportement* de la suite (u_n). Les termes sont-ils de plus en plus grands ? De plus en plus petits ? Aucun des deux ?

Définition 2.1. On dit que la suite (u_n) est *croissante* si, pour toute valeur de n, $u_n \leq u_{n+1}$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Cela veut dire que, n'importe où dans la suite, un terme quelconque est toujours plus petit que le terme qui suit.

De manière analogue, la suite (u_n) est dite *décroissante* si, pour toute valeur de n, $u_n \geq u_{n+1}$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Une suite *constante* est une suite dont tous les termes sont égaux.

Ainsi, pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudiera le **signe** de la différence de deux termes **consécutifs.**

Exemple 2.2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5n + 3$, pour $n \geq 0$. Commençons par calculer u_{n+1}.

$u_{n+1} = 5(n+1) + 3 = 5n + 5 + 3 = 5n + 8$. Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = 5n + 8 - (5n + 3) = 5 > 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

Exemple 2.3. On considère la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 & = -2 \\ v_{n+1} & = v_n - n^2 \end{cases}$$

Dans le cas, comme ici, d'une suite définie par récurrence, il est encore plus facile de calculer la différence de deux termes consécutifs:

$$v_{n+1} - v_n = v_n - n^2 - v_n = -n^2 < 0$$

et donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 2.4. Pour chacune des suites suivantes, calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = n^2 + 4n$
b) $u_n = \frac{1}{n+1}$
c) $u_n = 2^n$
d) $u_n = (2n+1)^2$
e) $u_{n+1} = (u_n)^2 + 3u_n + 1$ avec $u_0 = 10$.

Exercice 2.5. (Une autre méthode pour le sens de variation)

On considère la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{n}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

4. Après avoir justifié que tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, déduire de la question précédente le sens de variation de (u_n).

3. Suites Arithmétiques

3.1. Définition.

Définition 3.1. Une suite (u_n) est dite *arithmétique* si la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est à dire qu'il existe un nombre réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre réel r est appelé *raison* de la suite (u_n).

Exemple 3.2. Dans l'introduction de ce chapitre, la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 120.

Exemple 3.3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3. Cela veut dire que $u_{n+1} = u_n + 3$. Ainsi, $u_1 = 5 + 3 = 8$, $u_2 = 8 + 3 = 11$, $u_3 = 11 + 3 = 14$, ...

3.2. Terme général.

Proposition 3.4. *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors*
$$u_n = u_0 + n \times r.$$

Cette proposition nous donne l'expression du terme général d'une suite arithmétique en fonction de n (et de la raison et du premier terme). En partant du premier terme u_0, il faut rajouter logiquement n fois la raison r.

On peut donner une formule analogue mais en partant d'un terme u_p quelconque (par forcément du premier).
$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$
et en particulier, si on part de u_1,
$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$
(il est clair qu'en partant de u_1 on "rajoute" r "une fois de moins" que si on part de u_0.)

Exemple 3.5. On considère la suite arithmétique (w_n) de premier terme $w_1 = 4$ et de raison -3. On veut calculer w_{15}. Plutôt que de calculer successivement tous les terme jusqu'à w_{15}, on va utiliser la formule pour le terme général:
$$w_n = 4 + (n - 1) \times (-3) = 4 - 3n + 3 = 7 - 3n$$
et donc
$$w_{15} = 7 - 3 \times 15 = 7 - 45 = -38.$$

Exercice 3.6. Un arbre mesure un mètre lors de sa plantation et sa hauteur augmente chaque année de la même longueur.

1. L'arbre a doublé en deux ans. De combien a-t-il poussé chaque année?

2. On note u_n la hauteur de l'arbre au bout de n ans. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Exprimer u_n en fonction de n.

3. Au bout de combien de temps la hauteur de l'abre dépassera 25 mètres ?

3.3. **Sens de variation.** Par définition, si (u_n) est arithmétique de raison r (et ce peu importe le premier terme), on a $u_{n+1} - u_n = r$. Par conséquent, la proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.7. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$, la suite est croissante. Si $r < 0$, la suite est décroissante. Si $r = 0$, la suite est constante.*

Exercice 3.8. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\begin{cases} v_1 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & v_n - 4 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$?
2. Calculer les trois premiers termes.
3. Donner l'expression du terme général v_n.
4. Quel est le sens de variation de la suite ?

3.4. **Somme des termes.** On s'intéresse parfois à la somme des termes consécutifs d'une suite. La proposition suivante donne une formule pratique.

Proposition 3.9. *La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule*

$$S = \frac{n \times (\textit{premier terme } + \textit{ dernier terme})}{2}$$

En particulier,

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2}$$

et

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}.$$

Exemple 3.10. Un enseignant peut corriger 40 copies en une heure. Cependant, à cause de la fatigue, pour chaque heure qui suit, il en corrigera 2 de moins que l'heure précédente. Combien de copies aura-t-il corrigé en 7 heures?

On appelle a_n le nombre de copies corrigées au cours de la $n-$ième heure. Ainsi, $a_1 = 40$ et $a_{n+1} = a_n - 2$. Par conséquent, (a_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $a_1 = 40$. Pour pouvoir calculer $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_7$ en appliquant la formule précédente, il faut au préalable calculer a_7. Pour cela, on utilise la formule du terme général:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r = 40 + (n-1) \times (-2) = -2n + 42.$$

Ainsi $a_7 = -2 \times 7 + 42 = 28$ et donc

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_7 = \frac{7 \times (a_1 + a_7)}{2} = \frac{7 \times (40 + 28)}{2} = 238.$$

Il aura corrigé 238 copies en 7 heures.

Exercice 3.11. Calculer

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$$

4. Suites Géométriques

4.1. Définition.

Définition 4.1. Une suite (u_n) est dite *géométrique* si chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre réel q. C'est à dire qu'on a $u_{n+1} = u_n \times q$. Le nombre réel q est appelé *raison* de la suite (u_n).

Exemple 4.2. Dans l'introduction de ce chapitre, la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $1,037$.

Exemple 4.3. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 2. Cela veut dire que $u_{n+1} = u_n \times 2$. Ainsi, $u_1 = 5 \times 2 = 10$, $u_2 = 10 \times 2 = 20$, $u_3 = 20 \times 2 = 40$, ...

4.2. Terme général.

Proposition 4.4. *Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Cette proposition nous donne l'expression du terme général d'une suite géométrique en fonction de n (et de la raison et du premier terme). En partant du premier terme u_0, il faut logiquement multiplier le premier terme n fois par la raison q, c'est à dire par q^n (et non $n \times q$!!)

On peut donner une formule analogue mais en partant d'un terme u_p quelconque (par forcément du premier).

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

et en particulier, si on part de u_1,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

(il est clair qu'en partant de u_1 on multiplie par q “une fois de moins” que si on part de u_0.)

Exemple 4.5. On considère la suite géométrique (w_n) de premier terme $w_1 = 6$ et de raison $\frac{1}{2}$. On veut calculer w_9. Plutôt que de calculer successivement tous les terme jusqu'à w_{15}, on va utiliser la formule pour le terme général:

$$w_n = 6 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$$

et donc

$$w_9 = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{6}{2^8} = \frac{3}{128}.$$

Exercice 4.6. En période de sécheresse, une piscine perd chaque semaine un vingtième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient 60 m^3 d'eau.

1. On note u_n le volume d'eau dans la piscine au bout de n semaines. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Exprimer u_n en fonction de n.

2. Quel sera le volume d'eau dans la piscine à la fin de la huitième semaine?

4.3. Sens de variation.

Par définition, si (u_n) est géométrique de raison q (et ce peu importe le premier terme), on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Par conséquent, la proposition suivante est immédiate.

Proposition 4.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors,*

(i) *Si $u_0 > 0$ et si $0 < q < 1$, la suite est décroissante.*
(ii) *Si $u_0 > 0$ et si $q > 1$, la suite est croissante.*
(iii) *Si $q = 1$, la suite est constante.*

Exercice 4.8. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\begin{cases} v_1 &= 129 \\ v_{n+1} &= \frac{v_n}{3} \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$?
2. Calculer les trois premiers termes.
3. Donner l'expression du terme général v_n.
4. Quel est le sens de variation de la suite ?

4.4. **Somme des termes.** On s'intéresse parfois à la somme des termes consécutifs d'une suite. La proposition suivante donne une formule pratique.

Proposition 4.9. *La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule*

$$S = (\textit{premier terme}) \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

En particulier,

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

et

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Exercice 4.10. On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution du nombre de bactéries au cours du temps dans une situation de type expérimental. On dépose un morceau de viande sur un comptoir l'été, en plein soleil par 35°C, à 14h00. Le morceau de viande contient 100 bactéries, et dans ces conditions, le nombre de bactéries double tous les quarts d'heure. On note u_0 le nombre de bactéries à 14h00 et u_n le nombre de bactéries à 14h et $15 \times n$ minutes.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

Heure	14h00	14h15	14h30	15h00	15h30
Rang n	0				
Nombre de bactéries u_n	100				

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire le nombre de bactéries à 17h00.
4. On estime qu'à partir de 150000 bactéries dans un aliment, celui-ci a atteint un niveau impropre à la consommation par un être humain. Jusqu'à quelle heure, arrondie au quart d'heure, l'être humain peut-il consommer sans risque ce morceau de viande?