Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

$2^{\text{nde}}3$–DEVOIR MAISON N°1 : NOMBRES & INTERVALLES

Correction

1. Exercices d'application du cours

Cette partie a été corrigée en classe.

2. Problème: Nombres entiers, parité et irrationnalité de $\sqrt{2}$

Exercice 1. Pair ou impair ?

1. *Calculer* $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$. *Que semble-t-on remarquer ?*

On calcule

$2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49$. Le calcul de ces premiers carrés nous incite à penser que le carré d'un nombre pair reste pair et que le carré d'un nombre impair reste impair.

2. *On définit comme suit la parité d'un nombre entier:*

> **Définition.**
> Un entier relatif n est dit *pair* si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ et *impair* si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

a) Utiliser l'écriture précédente pour justifier que 99 *est impair et que* -110 *est pair*

On peut écrire $99 = 2 \times 49 + 1$ (donc ici $k = 49$) et $-110 = 2 \times (-55)$ (on a donc $k = -55$).

b) Soit $n = 2k$ *un nombre pair. En calculant* n^2*, montrer qu'il existe un nombre entier* k' *(qui dépend naturellement de* k*) tel que* $n^2 = 2k'$*. Que peut-on conclure quant à la parité de* n^2 *?*

Considérons un nombre pair n. Par définition de la parité (c'est à dire du fait d'être un multiple de 2), on peut écrire $n = 2k$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. En élevant au carré, on trouve $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$. Ainsi, en choisissant $k' = 2k^2$ (qui est bien un entier), on a $n^2 = 2k'$, ce qui veut dire que n^2 est encore pair.

c) Soit $n = 2k + 1$ *un nombre impair. En utilisant une identité remarquable, montrer que* n^2 *est impair.*

On procède de la même façon qu'à la question précédente: soit $n = 2k + 1$ un nombre impair (c'est à dire le successeur d'un nombre pair). En élevant au carré et en utilisant une identité remarquable bien connue, on a $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 4k) + 1$. En posant $k' = 2k^2 + 2k$, on peut donc écrire $n^2 = 2k' + 1$, ce qui est l'écriture d'un nombre impair. Ainsi, n^2 est impair.

3. *Montrer la réciproque, c'est à dire les propriétés suivantes:*

a) Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

b) Si le carré d'un entier est impair, alors cet entier est impair.

On va procéder par **contraposée.**

Pour montrer que n^2 pair entraîne n pair, il suffit de montrer que n non pair (c'est à dire n impair) entraîne n^2 non pair (c'est à dire impair). Mais nous avons en fait déjà montré cela à la question précédente. Donc l'implication a) est démontrée.

Le raisonnement pour b) est en tout point analogue.

On a ainsi montré dans cet exercice qu'un entier est pair (respectivement impair) si et seulement si son carré est pair (respectivement impair). On pourra utiliser ce résultat dans la suite, même sans avoir réussi à démontrer les questions précédentes.

Exercice 2. Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Objectif.

Le but de cet exercice est de montrer, comme il a été énoncé en cours, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, on va utiliser un *raisonnement par l'absurde.*

On va donc supposer que c'est le cas et, par une suite de déductions logiques, arriver à une contradiction.

On suppose donc que l'on peut écrire

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

où la fraction précédente est **irréductible**.

1. *Que vaut, en fonction de a et b, le nombre 2 ?*

On a supposé que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ainsi, en élevant au carré, on obtient

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

2. *Montrer que a^2 est pair. En déduire que a est pair (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent).*

La relation précédente peut également s'écrire $a^2 = 2b^2$, ce qui permet de déduire immédiatement que a^2 est pair. D'après l'exercice précédent, on en conclut que que a est pair également, et qu'on peut donc l'écrire $a = 2q$, pour un certain $q \in \mathbb{Z}$.

3. *Montrer que $a^2 = 4k$, où k est un entier à déterminer, puis que b^2 est pair. En déduire que b est pair.*

Par la question précédente, on a $a^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 4k$ où on a choisi $k = 2q$. En revenant à la première égalité, on a $2b^2 = a^2 = 4k$ ce qui donne $b^2 = 2k$ ou encore que b^2est pair, ce qui entraîne (par l'exercice précédent) que b est pair.

4. *D'après les questions précédentes, la fraction $\frac{a}{b}$ est-elle irréductible ? Conclure.*

Le numérateur a et le dénominateur b étant tous les deux pairs, la fraction a/b n'est pas irréductible. Ainsi, on aboutit à une contradiction. c'est donc l'hypothèse de départ, à savoir que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, qui n'est pas possible. Donc, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.