Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

$2^{\text{nde}}3$–DEVOIR MAISON N°1 : NOMBRES & INTERVALLES

À rendre au plus tard le **Mardi 30 Septembre**

1. Exercices d'application du cours *(12 points)*

Exercice 1. Ecrire sous forme de fraction irréductible

$$a)\ \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{8}} \qquad b)\ 5+3\left(7+2\left(\frac{1}{2}-5\right)\right).$$

Exercice 2. Transformer les nombres pour déterminer l'ensemble le plus petit auquel ils appartiennent.

$$a)\ \frac{2}{3}-\frac{1}{6} \qquad b)\ -8\times 0,625 \qquad c)\ \frac{25}{4}\times\frac{35}{9}$$
$$d)\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{8}} \qquad e)\ \sqrt{\frac{121}{100}} \qquad f)\ \left(1+\sqrt{7}\right)\left(1-\sqrt{7}\right)$$

Exercice 3. Tracer une droite graduée (unité 2 cm).
1. Représenter **clairement** (à l'aide de couleurs par exemple):
a) l'ensemble E des nombres réels supérieurs ou égaux à -3 et strictement inférieurs à $\frac{5}{2}$;
b) l'intervalle $]1;5]$ que l'on appelera F jusqu'à la fin de l'exercice.
2. Décrire $E\cap F$ et $E\cup F$.
3. Que contient l'ensemble $E\cap\mathbb{N}$?

2. Problème: Nombres entiers, parité et irrationnalité de $\sqrt{2}$ *(8 points)*

Exercice 4. Pair ou impair ?

1. Calculer $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 5^2, 7^2$. Que semble-t-on remarquer ?
2. On définit comme suit la parité d'un nombre entier:

> **Définition.**
> Un entier relatif n est dit *pair* si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n=2k$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$ et *impair* si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n=2k+1$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$.

a) Utiliser l'écriture précédente pour justifier que 99 est impair et que -110 est pair

b) Soit $n=2k$ un nombre pair. En calculant n^2, montrer qu'il existe un nombre entier k' (qui dépend naturellement de k) tel que $n^2=2k'$. Que peut-on conclure quant à la parité de n^2 ?

c) Soit $n=2k+1$ un nombre impair. En utilisant une identité remarquable, montrer que n^2 est impair.

3. Montrer la réciproque, c'est à dire les propriétés suivantes:
a) Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.
b) Si le carré d'un entier est impair, alors cet entier est impair.

Indication.
Utiliser un raisonnement par *contraposée*: pour montrer que A implique B, on peut montrer que la négation de B implique la négation de A.

On a ainsi montré dans cet exercice qu'un entier est pair (respectivement impair) si et seulement si son carré est pair (respectivement impair). On pourra utiliser ce résultat dans la suite, même sans avoir réussi à démontrer les questions précédentes.

Exercice 5. Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Objectif.
Le but de cet exercice est de montrer, comme il a été énoncé en cours, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, on va utiliser un *raisonnement par l'absurde*.
On va donc supposer que c'est le cas et, par une suite de déductions logiques, arriver à une contradiction.
On suppose donc que l'on peut écrire
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
où la fraction précédente est **irréductible**.

1. Que vaut, en fonction de a et b, le nombre 2 ?
2. Montrer que a^2 est pair. En déduire que a est pair (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent).
3. Montrer que $a^2 = 4k$, où k est un entier à déterminer, puis que b^2 est pair. En déduire que b est pair.
4. D'après les questions précédentes, la fraction $\frac{a}{b}$ est-elle irréductible ? Conclure.