Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

LE PARADOXE DES ANNIVERSAIRES

L'objectif de cette activité est d'étudier, en fonction du nombre de personnes dans un groupe, la probabilité qu'au moins deux de ces personnes fêtent leur anniversaire le même jour.

L'activité sera ramassée et ***notée.*** *Toutes les réponses doivent être soigneusement présentées et justifiées sur une feuille indépendante. Une grande importance sera apportée à la rédaction et à la présentation. Il est autorisé de faire ce travail par* ***groupe de quatre.*** *Auquel cas, on rendra une seule copie pour le groupe.*

Dans toute l'activité, on considère des années de **365 jours** et un groupe formé de n personnes.

1. Préliminaires

On note A l'évènement "Au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire". On cherche donc à calculer la probabilité de A, qui va naturellement dépendre du nombre n de personnes dans ce groupe.
1. Enoncer, en français, l'évènement $\overline{A}$.
2. Rappeler le lien entre $P(A)$ et $P(\overline{A})$.

Il apparaît qu'il sera nettement plus facile de déterminer $P(\overline{A})$ puis d'en déduire $P(A)$ que de faire le calcul directement. On va donc procéder de cette façon.

2. Calcul de $P(\overline{A})$

Afin de fixer les idées, on va commencer à raisonner en choisissant différentes valeurs de n.
1. On suppose que $n = 2$, c'est à dire qu'on interroge seulement deux personnes sur leurs dates d'anniversaire. En expliquant votre démarche (avec un schéma éventuel) et en justifiant vos calculs, déterminer la probabilité que ces deux personnes fêtent leur anniversaire un jour différent.
2. Question analogue avec $n = 3$.

3. En généralisant le raisonnement précédent, montrer que, dans un groupe de n personnes, la probabilité que personne ne soit né le même jour de l'année est égale à

$$p(\overline{A}) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times ... \times \frac{365-(n-1)}{365}.$$

En combinatoire, on peut exprimer cette quantité avec la notion d'*arrangement* de n parmi 365. Ainsi, on **admet** que l'on peut écrire

$$p(\overline{A}) = A_{365}^{n} \times \frac{1}{365^n}.$$

(De façon générale, l'arrangement A_n^k désigne le nombre de choix possibles de k objets parmi n, où l'ordre dans lequel on choisit les objets est pris en compte. Cette notion sera définie et développée en Terminale S.) La calculatrice graphique permet de calculer directement A_n^k.

3. Conclusion

A l'aide de la section précédente (et de votre calculatrice en mode *TABLE*), déterminer les valeurs de $P(A)$ pour $n = 5$, $n = 10$, $n = 18$, puis déterminer la valeur de n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins deux personnes du groupe aient la même date d'anniversaire soit supérieure à $0,5$. Commenter et donner votre interprétation du titre de cette activité.

A titre d'information, on trouve que, pour $n = 80$, il y a $99,99\%$ de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour de l'année!