Année 2014-2015
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Seconde - A la recherche du nombre d'or

*Cette activité est à faire individuellement pendant les vacances et est à rendre au plus tard le **4 Novembre 2014**. Son but est d'apprivoiser une quantité très utilisée par les artistes (notamment ceux de la renaissance), appelée* nombre d'or, *et traditionnellement notée ϕ.*

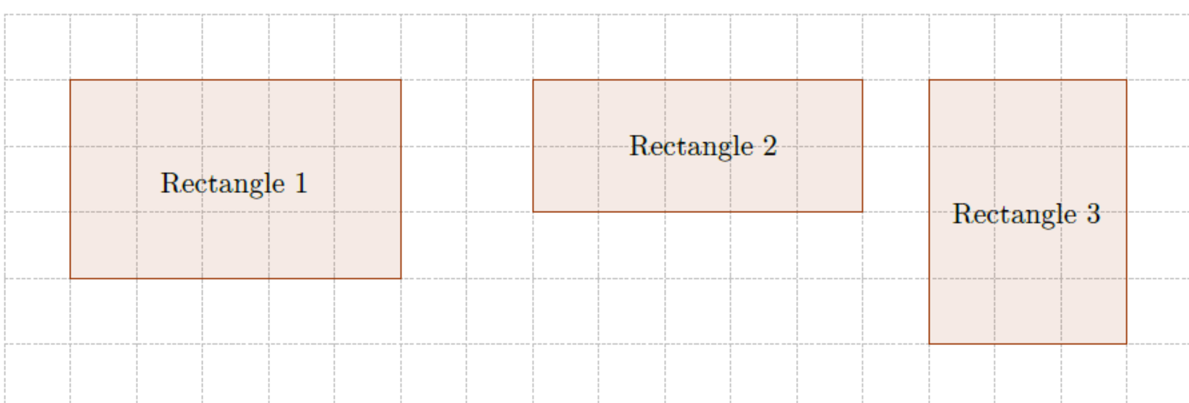
---

1. Notion instinctive de proportion

Instinctivement, ce qui nous parait beau et bien proportionné (cela reste néanmoins bien évidemment subjectif) est connecté à une certaine quantité. Voyons voir si cela fonctionne sur vous!

On aimerait tracer un rectangle ABCD qui soit "bien proportionné". Le segment [AD] est déjà tracé. Compléter la figure pour obtenir un rectangle qui vous semble "bien proportionné", pour lequel les segments [AB] et [DC] ne vous paraissent ni trop long, ni trop court.

Parmi les trois rectangles suivants, lequel vous semble le plus agréable à l'oeil ?

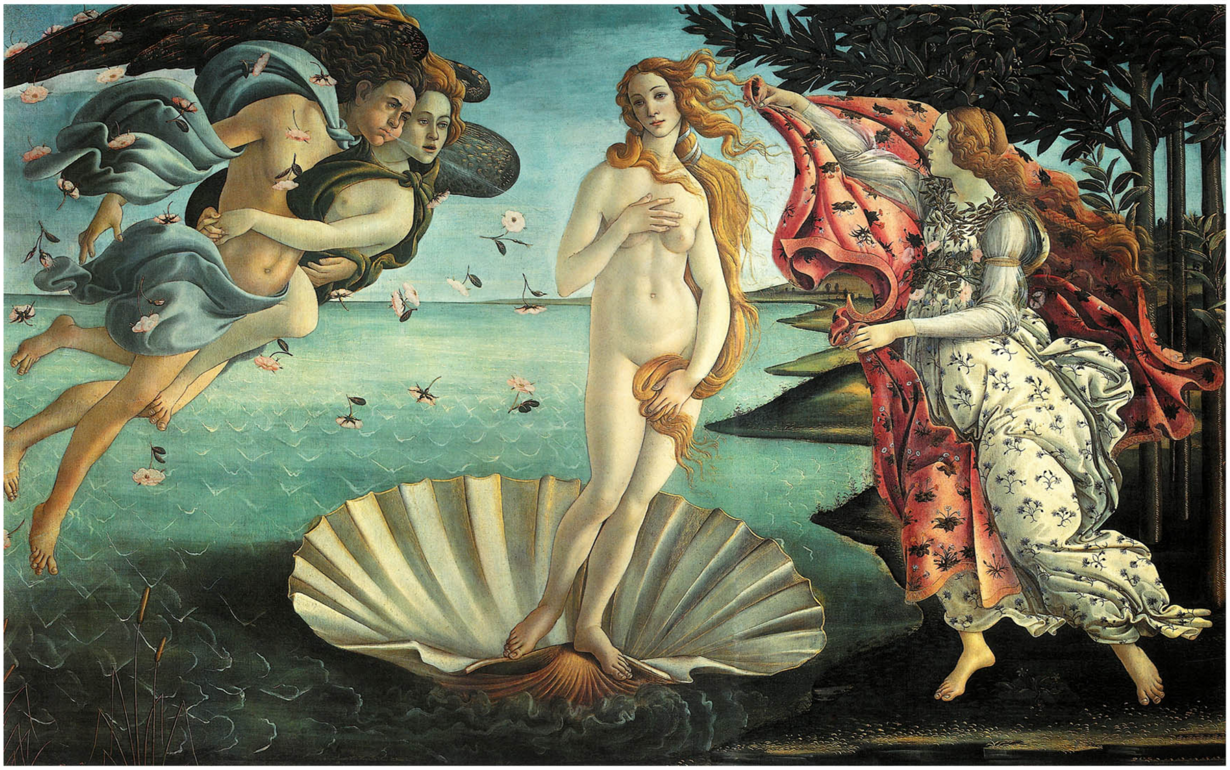


Calculez alors les rapports longueur sur largeur pour le rectangle que vous avez dessiné et pour celui que vous avez choisi. (On choisira un arrondi au dixième de cm pour les mesures).

En première approximation, le nombre d'or vaut $1,62$. Etes-vous loin de cette approximation ?

2. Le Nombre d'Or dans la peinture

Le tableau suivant, nommé *La naissance de Vénus*, a été peint par Sandro Boticelli vers 1485. Nous allons voir que les différentes proportions et positions des personnages ne sont pas choisies au hasard.



1. On appelle $ABCD$ les quatre coins du tableau. Mesurez et calculez le rapport AB/AD. Que constatez-vous ?

2. Placez les points E,F,G, H de sorte que $AEFD$ et $GBCH$ soient des carrés. Mesurez ensuite et calculez les rapports AG/AD et BC/EB. Que constatez-vous une fois de plus ?

3. Tracez les diagonales $[DG]$ et $[EC]$. Que peut-on observer ?

4. Tracez les cercles de diamètres $[GH]$ et $[EF]$. Quelle est votre conclusion ?

Définition. On appelle *rectangle d'or* un rectangle $ABCD$ tel que si on trace un carré $AEFD$, les rapports longueur sur largeur des rectangles $ABCD$ et $EBCF$ sont égaux.

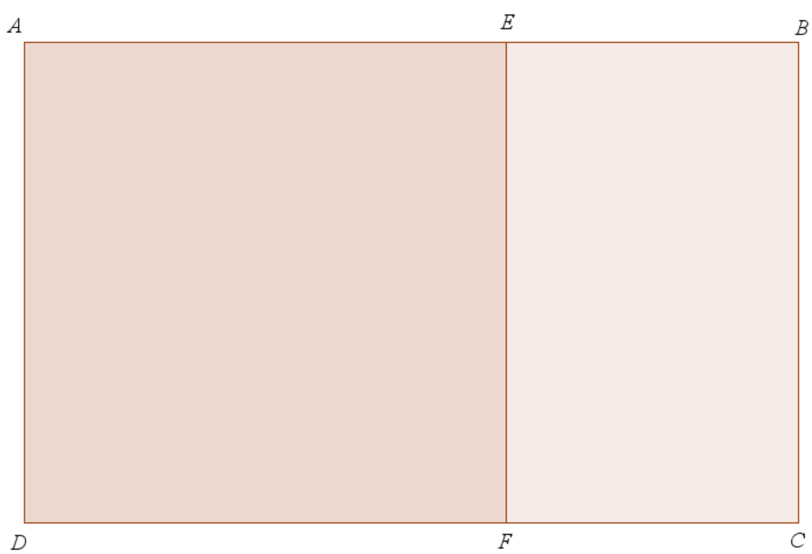
Le second tableau ci-dessous, peint vers 1495 a priori par Jacopo de' Barbari, est intitulé *Luca Pacioli avec son élève.* Il représente le religieux franciscain et mathématicien italien en plein cours de géométrie. Ce dernier est l'auteur entre autres de *De divina proportione* qui traite du nombre d'or et inclut des figures de polyèdres dûes à Léonard de Vinci.

1. On appelle A et B les deux coins inférieurs du tableau et E le projeté orthogonal du pouce gauche de Luca Pacioli sur l'axe (AB). Mesurez et calculez AB/AE. Que constatez-vous ?

2. On appelle C le bout du pouce gauche et D le bout de l'index de la même main de Pacioli. On note F le point d'intersection de la droite (CD) avec le haut de la page de gauche du livre. Mesurez et calculez CF/CD....

3. Calcul de la valeur du Nombre d'Or

Pour conclure sur ce nombre, il serait enfin bon de connaître sa valeur exacte. Pour nous aider, repartons d'un rectangle d'or dans lequel on a placé un carré d'or :



On note ϕ le nombre d'or, c'est à dire

$$\phi = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{EB}.$$

1. Exprimez AB en fonction de ϕ et de EB.
2. En écrivant $AB = AE + EB$, trouvez une deuxième relation entre AB, ϕ et EB.
3. En déduire que

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

4. Ainsi, ϕ sera solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ que nous allons essayer de résoudre.
  a) Montrer que $x^2 - x - 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$.
  b) Montrer que $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.
  c) En déduire, à l'aide d'une identité remarquable, que $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.
5. Quelle est donc la valeur **exacte** de ϕ ? Justifier.