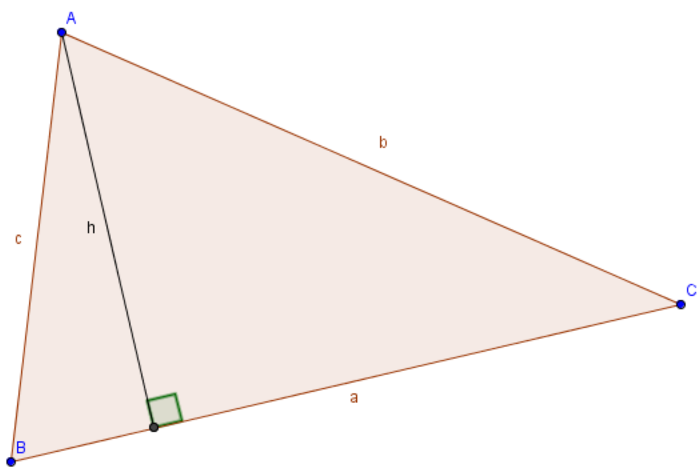
Année 2014-2015 - Cinquième
Cité scolaire Paul Valéry
Mathématiques - F.Gaunard

DEVOIR MAISON N°3 : CORRECTION

LA FORMULE DE HÉRON

Partie 1 : Aire d'un triangle

On considère un **triangle quelconque** ABC dont les longueurs des côtés sont nommés a, b, c, comme dans la figure ci-dessous.



1. La droite remarquable h s'appelle la **hauteur** issue de A. Elle passe par A et est perpendiculaire au côté opposé.

2. On voudrait avoir un triangle avec pour longueurs $a = 25$ cm, $b = 20$ cm et $c = 15$ cm.

a) De telles mesures sont bien compatibles avec l'inégalité triangulaire. En effet, la longueur du côté le plus long est bien inérieure à la somme des longueurs des deux autres côtés:

$$25 < 35 = 20 + 15.$$

b) Le triangle est représenté sur la feuille ci-jointe.

c) On mesure $h = 12$ cm.

d) La formule donnée pour l'aire du triangle est $\mathcal{A} = \frac{a \times h}{2}$. En remplaçant par les valeurs de a et h de ce cas précis, on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{25 \times 12}{2} = 150$$

donc l'aire du triangle vaut 150 cm².

e) Par définition, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}^2 = 150 \times 150 = 22500$.

3. On veut maintenant avoir un triangle avec pour longueurs $a = 24$ cm, $b = 19$ cm et $c = 17$ cm.

a) Comme précédemment, ces mesures sont bien compatibles avec l'inégalité triangulaire:

$$24 < 36 = 19 + 17.$$

b) Voir dessin sur feuille ci-jointe.

c) Cette fois, la valeur de h que l'on mesure n'est pas un nombre entier. Elle se situe entre 13, 3 et 13, 4 cm, en étant plus près de 13, 4 cm. On demande un arrondi à 0, 1 près, ce qui veut dire avec un seul chiffre après la virgule. On choisit donc $h = 13,4$ cm.

d) On remplace à nouveau a et h par leur valeur pour calculer

$$\mathcal{A} = \frac{24 \times 13,4}{2} = 160,8$$

donc l'aire de ce second triangle est de 160, 8 cm².

e) On obtient ici

$$\mathcal{A}^2 = 160,8 \times 160,8 = 25856,64 \simeq 25856,6$$

si l'on arrondit à 0, 1 près.

Dans cette partie, le calcul de l'aire du triangle a nécessité la construction du triangle, de la hauteur issue de A et la mesure de celle-ci. On va voir, dans la partie suivante, une méthode purement calculatoire, ne faisant intervenir aucune construction.

Partie 2 : la Formule de Héron

1. Le périmètre est la longueur du "tour" du triangle. Donc on l'obtient en faisant la somme des longueurs des côtés, c'est à dire $p = a + b + c$.

2. Pour le premier triangle, on obtient $p = 25 + 15 + 20 = 60$ soit un périmètre de 60 cm.

3. Pour le second triangle, on obtient $p = 24 + 17 + 19 = 60$ soit encore un périmètre de 60 cm.

4. Par définition, $s = \frac{p}{2}$ donc, dans les deux cas, on a $s = \frac{60}{2} = 30$.

La formule de Héron permet de calculer le carré de l'aire d'un triangle uniquement en connaissant les trois longueurs a, b, c des côtés du triangle (et par conséquent p et s). Elle s'énonce comme ceci:

$$\mathcal{A}^2 = s \times (s - a) \times (s - b) \times (s - c)$$

5. On remplace les lettres par la valeur du nombre qu'elles représentent dans chacun des deux cas.

Pour le premier triangle, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= 30 \times (30 - 25) \times (30 - 15) \times (30 - 20) \\ &= 30 \times 5 \times 15 \times 10 \\ &= 22500 \end{aligned}$$

Pour le second, on obtient par contre

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= 30 \times (30 - 24) \times (30 - 17) \times (30 - 19) \\ &= 30 \times 6 \times 13 \times 11 \\ &= 25740 \end{aligned}$$

On constate alors que, pour le premier triangle, les résultats sont les mêmes que dans la Partie 1, alors que pour le second triangle, ils sont différents. Cela vient du fait que, dans la Partie 1, la mesure de la hauteur du second triangle a été arrondie et cette imprécision se répercute dans les autres calculs pour finalement aboutir à un résultat un peu éloigné de la valeur réelle.

On va donc chercher une valeur plus précise de l'aire du second triangle. C'est à dire un nombre dont le carré est le plus proche possible de 25740.

Pour cela, on remplit les tableaux suivants, donnant le carré d'un nombre en fonction de ce nombre.

6. On obtient

x	0	100	200
x^2	0	10000	40000

x	100	150	200
x^2	10000	22500	40000

x	150	160	170	180	190	200
x^2	22500	25600	28900	32400	36100	40000

x	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
x^2	25600	25921	...	...	...	...	...	...	...	...

x	160	160,1	160,2	160,3	160,4	160,5	160,6	160,7	160,8	160,9
x^2	25600	...	...	25696,09	25728,16	25760,25	...	...	...	...

On observe que la valeur de x correspondant à une valeur de x^2 la plus proche de 25740 est $160,4$. Par conséquent, on peut dire que, à $0,1$ près, l'aire du second triangle vaut $160,4$ (on avait trouvé $160,8$ dans la Partie 1.)

7. Pour déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de l'aire du second triangle, on fait un tableau analogue aux précédents, entre $160,40$ et $160,49$:

x	160,4	160,41	160,42	160,43	160,44	160,45	160,46	160,47	160,48	160,49
x^2	25728,16	...	...	25737,78	25740,99	...	...	...	...	...

On constante cette fois que la valeur la plus proche, à $0,01$ près, est $160,44$.

On pourrait, si on le souhaitait, poursuivre l'opération entre $160,43$ et $160,439$ pour obtenir une précision à $0,001$ et ainsi de suite...