ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°2

Solution

Exercice 1. (D'après ECRICOME 2012)

(1) Pour $n = 0$

$L + A^0 (U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = L + A^n (U_0 - L)$. On a

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \\ &= A\left[L + A^n (U_0 - L)\right] + B \\ &= AL + A^{n+1} (U_0 - L) + B \\ &= L + A^{n+1} (U_0 - L) \quad \text{car } AL + B = L. \end{aligned}$$

La récurrence est ainsi démontrée et on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

(2) Il y a plusieurs méthodes permettant de prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x + y + z = 0.$$

On en propose une, assez courte, qui n'est pas forcément la méthode classique (qui consisterait à chercher sous quelle contrainte sur x, y et z un certain système aurait des solutions). Comme b a pour matrice (dans la base canonique) B, on a

$$\text{Im}(b) = \text{Vect}\left((3, 1, 2), (-1, 0, -1), (-2, -1, -1)\right).$$

On observe alors que

$$(3, 1, 2) + (-1, 0, -1) + (-2, -1, -1) = 0.$$

Ainsi, on peut simplifier

$$\text{Im}(b) = \text{Vect}\left((-1, 0, -1), (-2, -1, -1)\right).$$

D'autre part, on va trouver une base du sous-espace caractérisé par notre équation et ainsi, montrer qu'il s'agit de $\text{Im}(b)$. Notant $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -x + y + z = 0\}$, on voit rapidement qu'on peut écrire $E = \text{Vect}\left((1, 1, 0), (1, 0, 1)\right)$, et E est donc un sous-espace de dimension 2, tout comme $\text{Im}(b)$. De plus $(-1, 0, -1)$ et $(-2, -1, -1)$ satisfont l'équation $-x + y + z = 0$ donc $\text{Im}(b) \subset E$ et comme les deux ont même dimension $\text{Im}(b) = E$.

Pour $\text{Im}(\text{Id} - a)$, on détermine sa matrice dans la base canonique

$$I - A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que la première colonne est l'opposé de la somme des deux dernières. Donc

$$\text{Im}(\text{Id} - a) = \text{Vect}\left((-3, 0, -3), (-3, -4, 1)\right).$$

En particulier, les deux vecteurs ci-dessus n'étant pas colinéaires, $\dim(\mathrm{Id}-a) = 2$. De plus $(-3,0,-3)$ et $(-3,-4,1)$ satisfont l'équation $-x+y+z=0$ donc appartiennent à $\mathrm{Im}(b)$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a) \subset \mathrm{Im}(b)$. Comme ces deux sous-espaces ont la même dimension, on a bien

$$\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a).$$

(3) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On montrer son inversibilité par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ainsi P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) La matrice P étant inversible, l'endomorphisme qu'elle représente (dans la base canonique) est bijectif et notamment surjectif. Ainsi, ses trois colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Pour écrire les matrices demandées, il faut déterminer les images des vecteurs de cette nouvelle base par a et b:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice de a dans cette base est donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

De même, on calcule leurs images par b

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $b((1,1,1)) = 0$ qui a pour coordonnées $(0,0,0)$ dans la nouvelle base.

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $b(1,0,1) = (1,0,1)$ qui a pour coordonnées $(0,1,0)$ dans la nouvelle base, et

$$B\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\1 & 0 & -1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Donc $b(0,-1,1) = (-1,-1,0)$ et on cherche ses coordonnées dans la nouvelle base.

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & -1\\ x-z & = & -1\\ x+y+z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} y & = & -1-x\\ z & = & x+1\\ x & = & 0\end{array}\right. .$$

Donc $(-1,-1,0) = -(1,0,1) + (0,-1,1)$ et il suit que

$$B' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(6) On constate que $A = PDP^{-1}$. Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir la formule voulue

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} = PD \cdot D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

(7) D est diagonale donc

$$D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (1/2)^n & 0\\0 & 0 & (1/3)^n\end{pmatrix}.$$

En posant

$$E' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad G' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

on a donc

$$D^n = E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G'$$

et par la question précédente

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G'\right)P^{-1}\\ &= E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G \end{aligned}$$

où on choisit de poser $E = PE'P^{-1}$ et de même pour F et G. On précise alors la valeur de E:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & -1 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(8) Soit $L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} DL' + B' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} + B' \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q-1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$L' = DL' + B' \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} p &=& \frac{1}{2}p+1 \\ q &=& \frac{1}{2}q-1 \\ r &=& \frac{1}{3}r+1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} p &=& 2 \\ q &=& -2 \\ r &=& \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

et finalement

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

(9) Comme $A = PDP^{-1}$ et que $B = PB'P^{-1}$ (il n'était pas demandé de le vérifier mais on comprend assez vite que cela marche comme pour A), alors

$$\begin{aligned} PL'P^{-1} &= PDPP^{-1}L'P^{-1} + PB'P^{-1} \\ &= AL + B. \end{aligned}$$

(10) On peut faire les calculs directement ou bien raisonner avec des matrices plus simples.

$$EL = PE'P^{-1} \cdot PL'P^{-1} = P\left(E'L'\right)P^{-1} = P\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\right)P^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0.$$

(11) On a $U_n = L + A^n\left(U_0 - L\right)$ avec $A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G$.

On a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et de même $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ donc les coefficients de la matrice $L + A^n\left(U_0 - L\right)$ tendent vers ceux de $L + E\left(U_0 - L\right) = L + EU_0 - EL$ et comme $EL = 0$ alors chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice 2. (D'après ECRICOME 2004)

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et $\left(u_n\right)$ la suite de nombres réels définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal.

I - Étude de f.

(1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

et f est bien paire.

(2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas et qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

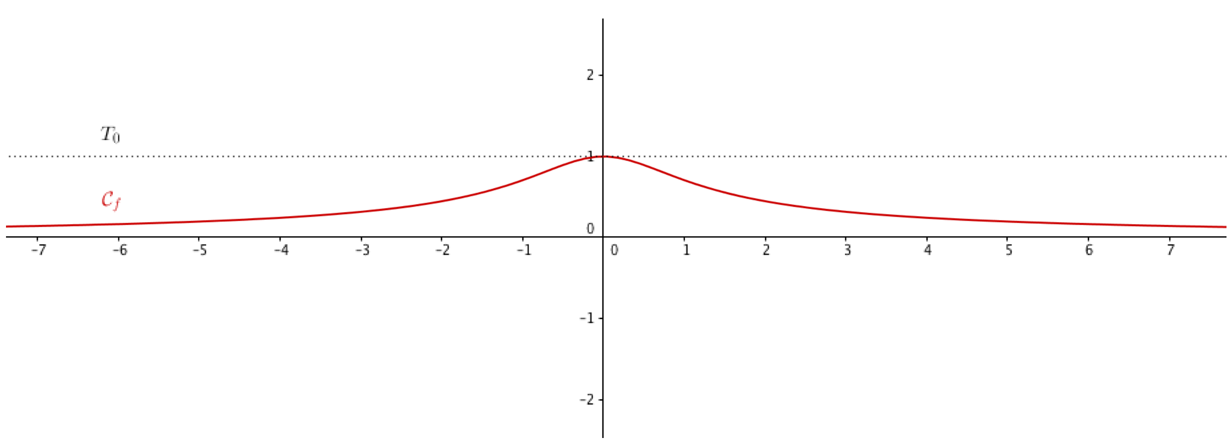
donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

(3) En $+\infty$, $\sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $f(x) \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par parité, on peut alors dresser le tableau de variations complet de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(4) Il est clair, d'après le tableau de variations ci-dessus, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$ et f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

(5) On pense aux asymptotes $y = 0$ en $\pm\infty$ et à la tangente horizontale T_0 en 0. On a bien sûr aussi à l'esprit que, par parité, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On obtient quelque chose ayant l'allure suivante:



(6) Comme f est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, le théorème de bijection assure qu'elle est bijective de $[0, +\infty[$ dans $]\lim_{+\infty} f, f(0)] =]0, 1] = J$.

(7) Pour tout y de l'intervalle $]0,1]$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{1}{y^2}$ en sont éléments.

$$f(x) = y \iff x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

et comme $y \in]0,1]$ alors $1-y^2$ est positif, et que $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$ et $y > 0$. Donc l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}^+$ est $x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

(8) Pour tout $y \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$f(x) = y \iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

donc on retrouve que f a une bijection réciproque sur $\mathbb{R}^+$ et que f^{-1} définie sur $]0,1]$ par

$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

II - Calcul d'aire

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > x^2$. Donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, que x^2 et x^2+1 en sont éléments, et que $|x| \geq -x$,

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x.$$

Donc $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, F est alors définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Comme $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x). \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que F est impaire revient à montrer que, pour tout x réel, $F(-x) = -F(x)$ ou, de manière équivalente, que $F(x) + F(-x) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} F(x) + F(-x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) \\ &= \ln\left(x^2 + 1 - x^2\right) = \ln(1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui justifie bien que F est impaire.

(4) Quand x tend vers $+\infty$, $x + \sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $F(x) \to +\infty$. Comme F est impaire, $F(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

(5) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive, on a

$$\mathcal{A}(\lambda) = [F(x)]_{x=\lambda}^{2\lambda} = F(2\lambda) - F(\lambda).$$

Afin d'en déterminer la limite, on fait le calcul explicite (car il s'agit d'une forme indéterminée).

$$\begin{aligned} F(2\lambda) - F(\lambda) &= \ln\left(2\lambda + \sqrt{(2\lambda)^2 + 1}\right) - \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}\right) \\ &= \ln\left(2\lambda\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2\lambda^2}}\right)\right) - \ln\left(\lambda\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}\right)\right) \\ &= \ln(2) + \ln(\lambda) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2\lambda^2}}\right) - \ln(\lambda) - \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2\lambda^2}}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}}\right) \\ &\to \ln(2). \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{A}(\lambda) \to \ln(2)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III - Etude de la suite (u_n).

(1) On calcule, en exhibant une primitive, les deux premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(3) - \ln(1) \\ &= \ln(3), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx \\ &= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

(2) On veut calculer
$$u_3 = \int_0^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$
Soit $u(x) = x^2$: $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$: $v(x) = \sqrt{1+x^2}$ avec u et v toutes deux de classe C^1 sur $[0,1]$. Ainsi, par la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} u_3 &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2} dx \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3) Pour tout $x \in [0;1]$, $x^{n+1} \leq x^n$. De plus, d'après la première partie, $f(x) \geq 0$, pour tout x réel. Ainsi, on a, pour tout $x \in [0;1]$
$$x^{n+1} f(x) \leq x^n f(x).$$
Par les propriétés de l'intégrale, on en déduit que
$$u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} f(x) dx \leq \int_0^1 x^n f(x) = u_n.$$
Donc la suite (u_n) est décroissante.

(4) La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

(5) On a vu que f était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$. Il suit donc trivialement que, pour tout $x \in [0;1]$,
$$0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$$
et par positivité de l'intégrale,
$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq \int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1}.$$
Ceci donne l'encadrement demandé
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(6) Et comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ alors par le théorème des gendarmes, $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3. (Inspiré de ECRICOME 2016, série S)

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement "on pioche une boule rouge au n-ième tirage".

(1) Chacun des n tirages peut amener ou non une nouvelle boule rouge donc $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

(2) (a) La proportion de boules rouges dans l'urne est $x/(x+y)$. On propose donc les programmes suivants.

```
function res=tirage(x,y)
    r=rand();
    if r<x/(x+y) then // si boule rouge (car x/(x+y) proba boule rouge)
        res=0;
    else
        res=1;
    end
endfunction
```

(b) On peut aussi écrire

```
function Xn=experience(a,b,n)
    x=a;
    y=b;
    for k=1:n
        r=tirage(x,y);
        if r==0 then //si boule rouge
            x=x+1; //on rajoute une boule rouge
        else
            y=y+1; //sinon on rajoute une boule noire
        end
    end
    Xn=x-a; //nombre de boules ajoutées = nombre total - nombre initial
endfunction
```

(3) (a) On fait bien attention au fait que la numérotation des valeurs est décalée de 1. Ainsi, il parait naturel de conjecturer que X_n suit une loi uniforme: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])$.

(b) On constate que $(X_1 = 1) = R_1$. Ainsi, $P(X_1 = 1) = 1/2$ et par conséquent $P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 1) = 1 - 1/2 = 1/2$ et on a bien $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; 1]\!])$.

(c) Comme $a = 1$ et $b = 1$ alors, sachant que $(X_n = k)$ est réalisé, l'urne contient $1+k$ boules rouges et $1+n-k$ boules blanches avant le tirage $n+1$. Ainsi

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = P_{(X_n=k)}(\overline{R}_{n+1}) = \frac{1+n-k}{2+n},$$

$$P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = P_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \frac{1+k}{2+n},$$

$$\forall \ell \notin \{k, k+1\}\,,\ P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = \ell) = 0.$$

(d) Soit $\mathcal{H}(n)$ la proposition: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])$. On a vu précédemment que la proposition $\mathcal{H}(1)$ était vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On a alors

$$P(X_{n+1} = 0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2},$$

Soit ensuite $\ell \in [\![1, n+1]\!]$. Par formule des probabilités totales avec le système complet $\{(X_n = k)\}_{k \in [\![0,n]\!]}$ et H.R., on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \ell) &= \sum_{k=0}^{n} P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = \ell) P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = \ell) \qquad \text{(par H.R.).} \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on constate que seulement deux termes de la somme sont nul nuls, ceux correspondant à $k = \ell$ et $k = \ell - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = \ell) &= \frac{1}{n+1} \big(P_{(X_n=\ell-1)} P(X_{n+1} = \ell) + P_{(X_n=\ell)} P(X_{n+1} = \ell) \big) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1 + \ell - 1}{2+n} + \frac{1 + n - \ell}{2+n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2+n} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $P(X_{n+1} = \ell) = 1/(n+2)$ donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n+1]\!])$, c'est-à-dire que la proposition $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie, et la récurrence est ainsi démontrée.