ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°1

Durée : 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition, puis l'ensemble de dérivabilité de f.
(2) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que
$$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$
et déterminer son signe.
(3) Montrer que, pour tout $x \neq 0$,
$$f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}$$
et en déduire la limite de f en $+\infty$.
(4) Déterminer la limite de f en 0 par valeur strictement supérieure.
(5) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$ et déterminer le signe de f sur le même intervalle.
(6) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) + f(-x) = 0$. En déduire des propriétés de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$ de f.
(7) Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{C}$.
(8) Calculer $f(\ln(3))$ et $f'(\ln(3))$ (on donnera les valeurs exactes).
(9) À l'aide des valeurs approchées ci-dessous, construire $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.

$\ln(3)$	$5/4$	$9/16$	$9/32$
$1,1$	$1,2$	$0,6$	$0,3$

(10) On pose $g(x) = \ln(e^{2x}-1) - x$. Quel est l'ensemble de définition de g? Montrer que g y est dérivable et calculer sa dérivée.
(11) Déterminer la limite de g en 0 par valeur supérieure.
(12) En factorisant par e^{2x} dans l'écriture de g, déterminer la limite de g en $+\infty$.
(13) À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de g sur son ensemble de définition. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$ que l'on nommera α.
(14) Montrer que
$$\ln(\sqrt{2}) \leq \alpha \leq \ln(2).$$

Exercice 2. (D'après Ecricome 2011)

Partie 1. Un jeu en ligne

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons ($\bigstar$) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	$\bigstar$		
2	$\bigstar$		
3		$\bigstar$	

On définit les événements H, V, D, N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

(1) Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
(2) Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
(3) En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048.$$

(4) La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu. On s'intéresse au gain journalier moyen que la la société peut espérer.
  (a) Expliquer pourquoi le gain moyen à chaque relance est égal à

$$2 \times \frac{19}{21} - 18 \times \frac{2}{21}.$$

  (b) En déduire le gain moyen journalier que peut espérer la société.

Partie 2. Cas de joueurs invétérés

(1) Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50%?
  (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$.)
(2) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur ait besoin d'au plus k tentatives pour pouvoir gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k.$$

Partie 3. Contrôle de qualité du jeu

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

(1) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.

(2) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égale à :

$$\mathrm{P}\left(N\right) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$

(3) On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée?

(4) En s'inspirant de la Question (4) (a) de la **Partie 1.**, déterminer la valeur maximale de x pour que le gain moyen de la société à chaque relance soit positif.

Exercice 3. (D'après Inseec 2002)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrèter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrète devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

(1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la $n^{ième}$ partie ».

(a) Calculer les probabilité conditionnelles $P_{A_n}\left(A_{n+1}\right)$ et $P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right)$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

(2) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie' ».

(a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P\left(B_n\right)$.

(b) Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, calculer $P\left(B_k\right)$.

(c) En déduire la probabilté q_n que le joueur ne gagne qu'une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 4. (D'après Ecricome 1999)

Préliminaires

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. (On donne: $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ à 10^{-2} près par excès et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près par défaut.)

Soient alors a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \;\; u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

Question 1

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
(b) Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
(c) Écrire un programme en `SciLab` qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1.$$

(a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
(b) Vérifier, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.
(c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exerice 5.

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle y est continue.
(2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ ainsi que sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
(3) (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$.
  (b) En déduire le sens de variations de f sur $]-\infty; 0[$, puis celui sur $]0; +\infty[$.
  (c) Soit $a < 0$. On considère la suite (a_n) définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{a}{n}$.
    (i) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
    (ii) Déterminer la limite de (a_n). Quelle est alors la limite de la suite $(f(a_n))$?
    (iii) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $a < a_2 < a_n < 0$. En déduire que $f(a) < 0$.
  (d) Soit $b > 0$. Par un raisonnement analogue, montrer que $f(b) > 0$.
  (e) Résoudre alors $f(x) = 0$.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 0$.
(5) (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - x = f(-x)$.
  (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(6) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
(7) Écrire un programme en `SciLab` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.