ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°2

Durée : 4 heures

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées****. Tous documents et calculatrice interdits. On accordera une grande importance à la rédaction et à la présentation des réponses.*

Exercice 1.

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcll} U_0 & \in & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \\ U_{n+1} & = & AU_n + B, & n \geq 0 \end{array}\right. .$$

(1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n (U_0 - L).$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note

- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\mathrm{Im}\,(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - a$.

(2) Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x + y + z = 0,$$

puis montrer que

$$\mathrm{Im}\,(b) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a).$$

(3) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et expliciter P^{-1}.

(4) Montrer que la famille de vecteurs formée par les trois colonnes de P forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette nouvelle base.

(6) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

(7) En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

(8) Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' = DL' + B'$$

(9) Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie:

$$L = AL + B.$$

(10) Établir que $EL = 0$.

(11) Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice 2.

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels définie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal.

I - Étude de f.

(1) Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
(3) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
(4) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
(5) Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
(6) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
(7) Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :

$$f(x) = y.$$

(8) Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.

II - Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0.$$

(b) En déduire l'ensemble de définition de F.

(2) Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

(4) Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.

(5) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III - Etude de la suite (u_n).

(1) Calculer u_0 et u_1.

(2) Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.

(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.)

(3) Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

(4) Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question.)

(5) Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(6) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 3.

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement "on pioche une boule rouge au n-ième tirage".

(1) Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

(2) On souhaite simuler l'expérience grâce à `SciLab`.

(a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

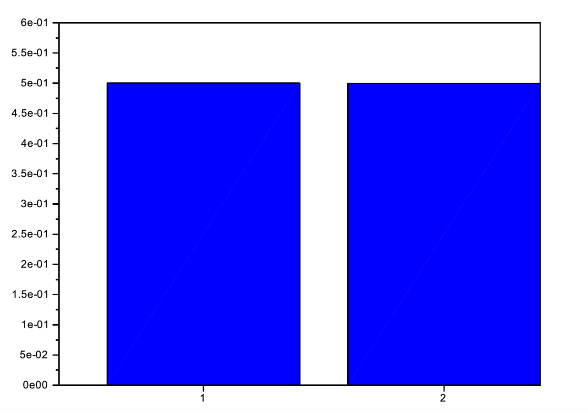
```
function res=tirage(x,y)
    r=rand();
    if ............... then
        res=0;
    else
        res=1;
    end
endfunction
```

(b) Recopier et compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

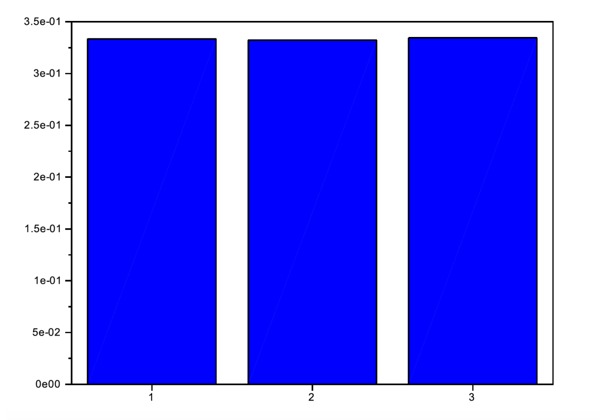
```
function Xn=experience(a,b,n)
    x=a;
    y=b;
    for k=1:n
        r=tirage(x,y);
        if r==0 then
            x=............
        else
            ..............
        end
    end
    Xn=...................
endfunction
```

(3) On écrit une fonction `simulation(a,b,n,m)` qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie est un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = n)$. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 4 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en "bâtons". On saisit successivement dans la console les instructions suivantes dont les figures correspondantes apparaissent ci-dessous.

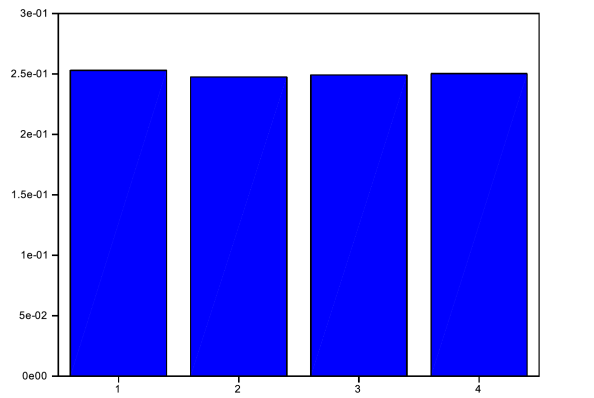
```
--> bar(simulation(1,1,1,100000))
```



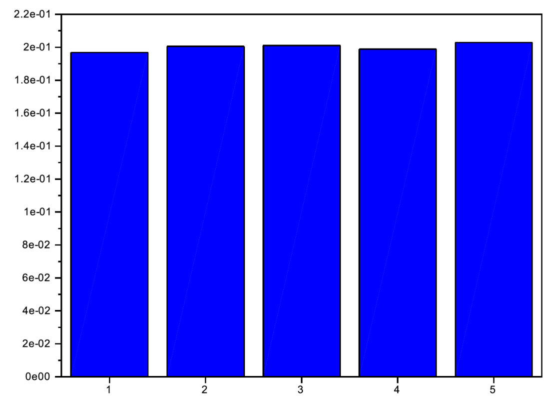

```
--> bar(simulation(1,1,2,100000))
```



`--> bar(simulation(1,1,3,100000))`



`--> bar(simulation(1,1,4,100000))`



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}.$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au (3a).
(On pourra utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(X_n = k)\}$ et la question précédente.)