ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

À rendre le 22 Septembre

---

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**.*

Exercice 1. (Simplifications)

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier
$$A = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}}.$$

(2) Simplifier au maximum
$$B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$

(1) Écrire l'expression suivante sans le symbole de la valeur absolue
$$C(x) = 2|3x - 1| - |7 - 8x|.$$

(2) En déduire les solutions de l'équation
$$\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = |7 - 8x|.$$

Exercice 3. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, les solutions réelles de
$$(m-2)x^2 + 2(m+1)x + m - 14 = 0.$$

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Nier, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes:

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$;
(ii) La courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = x$;
(iii) $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$;
(iv) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$;
(v) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exercice 5. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Dans chacun des cas suivants, dire si les propositions P et Q sont équivalentes.

(i) **P:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
Q: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$.

(ii) **P:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$.
Q: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$.

(2) Donner un exemple de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toutes deux différentes de la fonction identiquement nulle, dont le produit est nul (on pourra s'aider d'un dessin).

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$. Dans tout l'exercice, $\mathcal{C}$ désignera la courbe représentative de f.

(1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
(2) Déterminer les limites de f aux extrémités de son ensemble de définition.
(3) On définit une fonction g sur $\mathbb{R}_+$ en posant
$$g(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
La fonction g est-elle continue ? On dit que g *prolonge par continuité* la fonction f. Expliquer cette terminologie.
(4) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(x) \leq x + 1$.
(5) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f.
(6) Étudier la la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
(7) Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
(8) Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$dans un repère orthonormé.

Exercice 7. (Ange ou Démon?)

José et Josette, d'apparence humaine, sont en fait des émissaires de l'au-delà. On ne sait pas s'ils sont tous les deux des anges, tous les deux des démons ou bien s'il y a un démon et un ange. On sait cependant que les anges disent toujours la vérité et que les démons mentent systématiquement.

Dans chacun des cas suivants (indépendants les uns des autres), dire, en fonction de leurs paroles rapportées, quelles sont les possibilités pour le couple (José,Josette). (On justifiera les réponses à l'aide du langage propositionnel et de connecteurs logiques.)

(i) Josette dit "je suis un ange ou José en est un".
(ii) José dit "nous sommes tous les deux des anges", ce à quoi Josette répond "José ment!".
(iii) José dit "si moi je suis un ange, alors Josette est un démon".
(iv) Josette dit "un de nous est un ange et l'autre est un démon".