❄ ❄ Devoir Maison n°10 ❄ ❄

À rendre le 7 Janvier

Exercice 1. (Tour de chauffe)

(1) En dérivant $(1+x)^n$ et à l'aide de la formule du binôme, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(2) Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, puis la dérivée de la fonction f définie par
$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^x}\right).$$

Exercice 2. (Systèmes linéaires)

(1) Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3a \\ x & + & 2y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(2) Discuter, et résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-m \end{array}\right.$$

Exercice 3. On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de "pile" lors d'un jet de la pièce vaut $3/4$. On suppose que, pour une pièce donnée, les différents lancers successifs son indépendants les uns des autres.

(1) On prend une pièce au hasard dans le lot et on la lance. Le résultat de ce jet est "pile". Quelle est alors la probabilité que la pièce soit truquée?

(2) On relance cette même pièce et on obtient à nouveau "pile". Quelle est alors la probabilité que la pièce soit truquée?

(3) On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d'éliminer celles qui sont truquées. Pour cela, on prend les pièces du lot une à une et on lance chaque pièce deux fois:

- ❄ Si au cours des deux lancers on obtient au moins un "pile", on décide d'éliminer la pièce.
- ❄ Dans le cas contraire, on la conserve.

(a) Quelle est la probabilité d'éliminer une pièce quand elle n'est pas truquée?
(b) Quelle est la probabilité de garder une pièce quand elle est truquée?

❄ ❄ ❄

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 = 1$ et

$$f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & 1 + \frac{2}{x} \end{array}$$

(1) Étudier le sens de variations de f sur $[1;3]$. Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, $f(x) \in [1;3]$. Que peut-on en déduire sur (u_n)?
(2) Soit $g = f \circ f$. Montrer que g est croissante.
(3) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{2n}$ est croissante.
(4) Montrer ensuite que la suite (w_n) définie par $w_n = u_{2n+1}$ est décroissante.
(5) Montrer que (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite, à déterminer (indication: on cherchera les points fixes de g).
(6) Que peut-on conclure à propos de (u_n)?

Exercice 5. (La moyenne chaque semaine) Un enseignant consciencieux propose des devoirs à la maison chaque semaine. Un élève sérieux, qui fait ses DM absolument toutes les semaines, fait le constat suivant:

❄ Si il a la moyenne à un DM, il a la moyenne à celui d'après avec une probabilité de 80%.
❄ Si il n'a pas la moyenne à un DM, il a alors la moyenne à celui d'après avec une probabilité de 60%.

Au tout premier DM, il n'avait pas très bien commencé, avec une note de 8/20. On note A_k l'évènement "l'étudiant sérieux a la moyenne au DM numéro k" et p_k la probabilité correspondante.

(1) Établir une relation entre p_{k+1} et p_k. En déduire l'expression de p_k en fonction de k. Que peut-on penser du niveau de l'étudiant au bout d'un grand nombre de semaines?
(2) Écrire l'ensemble des instructions `SciLab` qui permettent de représenter graphiquement l'évolution de la probabilité p_k en fonction de k pour les 36 semaines de l'année scolaire. (On pourra joindre la représentation graphique susmentionnée.)