❄ ❄ Devoir Maison n°10 ❄ ❄

Solution

Exercice 1. (Tour de chauffe)

(1) D'après la formule du binôme, on a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

On dériva alors chaque membre de l'égalité précédente. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on peut dériver terme à terme (par rapport à x) dans la somme du membre de droite. On obtient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

En prenant $x = 1$ dans l'égalité précédente, on obtient bien l'égalité souhaitée

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k.$$

(2) L'expression algébrique de la fonction f est donnée par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^x}\right) = \ln(e^{2x}+2e^x-3) - \ln(e^x) = \ln(e^{2x}+2e^x-3) - x.$$

Pour que cette expression soit bien définie, il faut que $e^{2x}+2e^x-3$ (qui est en argument du logarithme) soit strictement positif. On résout donc l'équation

$$e^{2x}+2e^x-3 > 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} X & = & e^x \\ X^2+2X-3 & > & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} X & = & e^x \\ X & \in &]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[\end{array}\right.$$
$$\iff e^x > 1 \iff x > 0.$$

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus, par composition de fonction dérivables, f est également dérivable sur son ensemble de définition et on a

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+2e^x-3} - 1 = \frac{e^{2x}+3}{e^{2x}+2e^x-3}.$$

Exercice 2. (Systèmes linéaires)

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$, on résout le système par la méthode du *Pivot de Gauss*.

$$(S_a) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & 2z & = & 3a & (L_1) \\ x & + & 2y & + & z & = & a & (L_2) \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$(S_a) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & 2z & = & 3a & L_1 \\ & & y & - & z & = & -2a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & - & y & - & 3z & = & -6a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$(S_a) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & & + & 3z & = & 5a & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & - & z & = & -2a & L_2 \\ & & & z & = & 2a & L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}(L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$(S_a) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = -a & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ & y & & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & z & = 2a & L_3 \end{array}\right.$$

On obtient donc une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(-a; 0; 2a)\}.$$

(2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour résoudre ce système, dont les coefficients dépendent de m, on utilise la méthode du pivot de Gauss jusqu'à rencontrer devoir considérer un pivot qui dépend de m. Dès que cela arrive, on différencie les cas, selon la nullité du pivot. Il est intéressant de réordonner le système:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & z & = & 1-m & (L_1) \\ mx & + & (1+m)y & + & (1+m)z & = & m-m^2 & (L_2) \\ mx & + & (1-m)y & + & (1-m)z & = & m^2 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & z & = & 1-m & L_1 \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ & & (1-2m)y & + & (1-2m)z & = & 2m^2 - m & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccl} x & & & = & 1-m & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y + & z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & 0 & = & 2m^2 - m & L_3 \leftarrow L_3 - (1-2m)L_2 \end{array}\right.$$

Il suit que si $2m^2 - m \neq 0$, le système est incompatible et n'a pas de solution. On regarde alors ce que donne le système pour les deux valeurs ($m = 0$, $m = 1/2$) qui annulent $2m^2 - m$:

- Si $m = 0$, le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & + z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} x & = 1 \\ y & = -z \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions est (infini et égal à)

$$\mathcal{S} = \{(1; -z; z) : \; z \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $m = 1/2$, on trouve d'une manière analogue

$$\mathcal{S} = \{(\frac{1}{2}; -z; z) : \; z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3. Avant de commencer à répondre aux questions de l'exercice, on peut introduire des notations pour les évènements mentionnés et traduire les données du texte en termes de probabilités. Notons alors A l'évènement "on obtient pile" et T l'évènement "la pièce choisie au hasard est truquée". On sait donc que $P(T) = 50/100 = 1/2 = P(\overline{T})$ et que $P_T(A) = 3/4$ (mais aussi que $P_{\overline{T}}(A) = 1/2$).

(1) Il s'agit dans cette première question de déterminer $P_A(T)$. Il faut donc utiliser la *formule de Bayes*. Cette dernière nous donne

$$P_A(T) = \frac{P_T(A)P(T)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

(2) Cette fois on veut connaître la probabilité que la pièce soit truquée sachant qu'on a obtenu consécutivement deux fois "pile". Il ne faut surtout pas élever au carré le résultat précédent! En notant A_2 l'évènement "obtenir consécutivement 2 fois pile" et en utilisant à nouveau la formule de Bayes, on obtient

$$P_{A_2}(T) = \frac{P_T(A_2)P(T)}{P_T(A_2)P(T) + P_{\overline{T}}(A_2)P(\overline{T})} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{13}.$$

(3) Afin d'effectuer le tri, on lance deux fois une pièce. Eliminer une pièce revient à obtenir au moins une fois pile; c'est le contraire d'obtenir (aucune fois "pile" donc) deux fois "face". Notons alors E l'évènement "on élimine la pièce après les deux lancers".

(a) On veut calculer ici $P_E(\overline{T})$. Les règles sur les probabilités conditionnelles donnent

$$P_{\overline{T}}(E) = 1 - P_{\overline{T}}(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

il y a donc beaucoup de pertes!

(b) La probabilité de conserver une pièce lorsqu'elle est truquée est celle d'obtenir deux fois "face" alors que la pièce est truquée, c'est à dire

$$P_T(\overline{E}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

la probabilité de laisser passer une pièce truquée est donc assez faible.

Exercice 4.

(1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ donc en particulier sur $[1;3]$. Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1;3]$. Il suit que

$$1 \leq x \leq 3 \Longrightarrow 3 = f(1) \geq f(x) \geq f(1) = \frac{5}{3} > 1$$

et f envoie donc tout élément de l'intervalle $[1;3]$ dans $[1;3]$. Il découle de cette observation, par une récurrence immédiate que tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle:

$$\forall n \geq 0, \quad 1 \leq u_n \leq 3.$$

(2) Soit $g = f \circ f$. On montre que g est croissante en faisant une preuve analogue au fait que la composée de deux fonctions décroissante est croissante: soit $x \leq y$. Alors, par décroissance de f, on a $f(x) \geq f(y)$. En appliquant f une fois de plus, et toujours grâce au fait que celle-ci est décroissante, on a $g(x) = f\left(f(x)\right) \leq f\left(f(y)\right) = g(y)$. Ainsi, g est bien croissante.

(3) Vérifions tout d'abord que $v_0 \leq v_1$. Par définition, $v_0 = u_0 = 1$, mais $v_1 = u_2$. Il faut donc calculer le terme intermédiaire u_1 car la suite est définie par récurrence. On a $u_1 = f(u_0) = 1 + \frac{2}{1} = 3$. On trouve ensuite $v_1 = u_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. On a bien $v_0 \leq v_1$ et l'initialisation est bien vérifiée. Supposons maintenant que $v_n \leq v_{n+1}$ pour un certain $n \geq 0$. On veut montrer que $v_{n+1} \leq v_{n+2}$. On utilise la croissance de g en remarquant que

$$g(v_n) = g(u_{2n}) = f\left(f(u_{2n})\right) = f(u_{2n+1})u_{2n+2} = u_{2(n+1)} = v_{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $v_n \leq v_{n+1}$ et donc

$$v_{n+1} = g(v_n) \leq g(v_{n+1}) = v_{n+2},$$

ce qui est bien ce qu'on voulait et la suite (v_n) est bien croissante.

(4) Il s'agit d'une démonstration vraiment analogue. La croissance de g préserve les inégalités et la récurrence se fait donc exactement comme dans la question précédente. Le seul changement provient finalement de l'initialisation qui a lieu dans le sens différent. On doit vérifier que $w_0 = u_1 = 3 \geq w_1 = u_3$. Par définition, $u_3 = 1 + \frac{2}{5/3} = 11/5$, ce qui est donc correct.

(5) Les deux suites étant *extraites* de la suite (u_n), elles en vérifient les propriétés, notamment (v_n) est majorée (par 3) et (w_n) est minorée (par 1). Par le *théorème de convergence monotone*, elles sont donc toutes deux convergentes (*a priori* vers des limites différentes). Or, comme $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$, le passage à la limite impose finalement que chacune des deux limites doit être un point fixe de la fonction g. Il faut donc déterminer

les points fixes de g, c'est à dire les solutions de l'équation $g(x) = x$. On commence par exprimer algébriquement la fonction g, pour $x \in [1;3]$:

$$g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{x}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}.$$

$$g(x) = x \iff \frac{3x+2}{x+2} - x = 0 \iff \frac{-x^2+x+2}{x+2} = 0 \iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

La seule limite possible dans l'intervalle $[1;3]$ est donc 2. Ainsi, les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers 2.

(6) On a déjà vu ce type de résultat dans le Devoir Maison n°6. On peut en conclure que (u_n) converge également vers 2 car à la fois ses termes d'indices pairs **et** ses termes d'indices impairs le font.

Exercice 5. (La moyenne chaque semaine)

Les données du texte se traduisent par $P(A_1) = 0$ (l'élève n'a pas eu la moyenne au premier DM) et les relations conditionnelles:

$$P_{A_k}(A_{k+1}) = 80\% = \frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A}_k}(A_{k+1}) = 60\% = \frac{3}{5}.$$

(1) D'après la *formule des probabilités totales*, on a

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= P(A_{k+1}) = P_{A_k}(A_{k+1}))P(A_k) + P_{\overline{A}_k}(A_{k+1}))P(\overline{A}_k) \\ &= \frac{4}{5}p_k + \frac{3}{5}(1-p_k) \\ &= \frac{1}{5}p_k + \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite (p_k) est arithmético-géométrique. En suivant le plan d'étude établi au Chapitre 2 pour les suites arithmético-géométriques, on peut exprimer facilement le terme général de (p_k):

$$p_k = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\right).$$

Il est alors clair que $p_k \longrightarrow 3/4$, $n \to +\infty$. Ainsi, on peut estimer à 75% sa probabilité de d'obtenir la moyenne à un devoir très très lointain dans une galaxie très très lointaine.

(2) Voici la suite d'instructions (déjà vues en classe) et le résultat attendus (la convergence vers la limite est très rapide!):

```
-->x=1:1:36; y=zeros(1,36); for i=1:36 y(i)=(3/4)*(1-(1/5)^(i-1)); end

-->plot2d(x,y,-1)
```