Devoir Maison n°11

À rendre le 25 Janvier

Exercice 1. (Divisions euclidiennes)

(1) Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pour que le reste de la division euclidienne de $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$ par X^2+2 soit nul.

(2) Soient $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ est 1 et que celui de P par $X-b$ est -1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$?

(3) Quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)=(X+1)^n-X^n-1$ par $Q(X)=X^2-3X+2$? (On commencera par factoriser Q.)

(4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, le reste de la division euclidienne de $P(X)=(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$ par $Q(x)=2X^3-3X^2+X$ est nul. (On commencera par factoriser Q.)

Exercice 2.

(1) Discuter en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ si la fonction f suivante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(e^{x-1}-1)}{x-1}, & \text{si } x<1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{6x-5}-b}{x-1}, & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

(2) Soient $a, b>0$. Étudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor, \qquad x \mapsto \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\frac{b}{x}.$$

Exercice 3. Pour $n \geq 0$, on définit le polynôme $P_n(X)$ par

$$P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}.$$

(1) Expliciter P_0, P_1 et P_2. Déterminer leurs racines.

(2) Établir une relation entre $P_{n+1}'(X)$ et $P_n(X)$.

(3) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante:

$$\mathcal{P}_n\ :\ \begin{cases} (i) & \text{si } n \text{ est pair, } P_n \text{ n'admet aucune racine réelle;} \\ (ii) & \text{si } n \text{ est impair, } P_n \text{ admet une unique racine réelle, notée } a_n \text{ et } P(x)>0 \Longleftrightarrow x>a_n. \end{cases}$$

Exercice 4. On considère l'application

$$\Phi:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & X^2P'(X)+X-1. \end{array}$$

(1) Quel est le degré de $\Phi(P)$ (en fonction de celui de P)?

(2) Exprimer les coefficients de $\Phi(P)$ en fonction de ceux de P.

(3) En déduire l'écriture d'une fonction `SciLab` prenant comme argument un polynôme P et renvoyant le polynôme $\Phi(P)$.