Devoir Maison n°11

Solution

Exercice 1. (Divisions euclidiennes)

(1) On commence donc par écrire la division euclidienne:

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)Q(X) + R(X).$$

Il est alors nécessaire que le degré de Q soit égal à 2, et on sait de plus que le degré de R est inférieur ou égal à 1. Ainsi, on va donc déterminer $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)(aX^2 + bX + c) + dX + e.$$

On développe, réduit puis identifie. On trouve alors

$$(X^2+2)(aX^2+bX+c) + dX + e = aX^4 + bX^3 + (c+2a)X^2 + (2b+d)X + 2c + e,$$

ce qui impose

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c+2a & = & \lambda \\ 2b+d & = & \mu \\ 2c+e & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & \lambda - 2 \\ d & = & \mu - 2 \\ e & = & 6 - 2\lambda \end{cases}.$$

On peut donc écrire la division euclidienne explicitement

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)(X^2 + X + \lambda - 2) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

Ainsi, pour que le reste de cette division soit nul, il est nécessaire et suffisant que $\mu = 2$ et que $\lambda = 3$.

(2) Si le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1, cela veut dire qu'il existe un polynôme $S(X)$ tel que

$$P(X) = (X-a)S(X) + 1.$$

En particulier, cette égalité implique que $P(a) = 1$. De même, le reste de la division euclidienne de P par $X - b$ est égal à -1, on en déduit donc que $P(b) = -1$. Ecrivons maintenant la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$:

$$P(X) = (X-a)(X-b)U(X) + R(X),$$

où le reste $R(X)$ est de degré inférieur ou égal à 1 et peut donc s'écrire $R(X) = \alpha X + \beta$. Il faut donc déterminer les coefficients α et β. On a besoin de deux équations, il faut donc injecter dans la division euclidienne des valeurs qui permettent d'obtenir des équations sur α et β qu'on pourra résoudre, c'est à dire qu'il ne faut pas faire apparaître de terme qui dépende de U dont on ne connait rien. On choisit donc les racines du polynôme par lequel on divise (et c'est la méthode qu'on utilisera également dans les autres questions). En évaluant l'équation de division euclidienne en a et b on obtient:

$$1 = P(a) = R(a) = a\alpha + \beta \qquad \text{et} \qquad -1 = P(b) = R(b) = \alpha b + \beta.$$

On résout alors ce système facile

$$\left\{\begin{array}{lcr} a\alpha+\beta &=& 1 \\ b\alpha+\beta &=& -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} \alpha &=& \frac{2}{a-b} \\ \beta &=& -\frac{(a+b)}{a-b} \end{array}\right.$$

et on peut donc écrire le reste demandé comme

$$R(X) = \frac{2}{a-b}X - \frac{(a+b)}{a-b}.$$

(3) On procède exactement de la même manière qu'à la question précédente. Il faut commencer par déterminer les racines du polynôme par lequel on divise. On voit immédiatement que $Q(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-2)(X-1)$. Ainsi, on cherche à déterminer a et b tels que

$$(X+1)^n - X^n - 1 = (X-1)(X-2)U(X) + aX + b.$$

On évaluant successivement en 1 puis en 2, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcr} a+b &=& 2^n - 2 \\ 2a+b &=& 3^n - 2^n - 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} a &=& 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ b &=& 3\times 2^n - 3^n - 3 \end{array}\right.$$

et on peut donc écrire le reste, comme demandé,

$$R(X) = (3^n - 2^{n+1} + 1)X + 3(2^n - 3^{n-1} - 1).$$

(4) Une fois encore, on cherche à déterminer les coefficients du reste de la division euclidienne. Cette fois, on veut vérifier que ces coefficients sont tous nuls. Comme le polynôme diviseur est de degré 3, le reste sera de degré inférieur ou égal à 2. On factorise, comme précédemment, de manière immédiate le polynôme Q

$$Q(X) = X(X-1)(2X-1).$$

(Il admet alors 0, 1 et 1/2 comme racines). La division euclidienne s'écrit

$$(X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1 = X(X-1)(2X-1) + aX^2 + bX + c.$$

On évalue aux trois racines

$$\left\{\begin{array}{lcl} c &=& 0 \\ a+b+c &=& 0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& 0 \end{array}\right.$$

et le reste est bien identiquement nul, comme demandé. On pouvait aussi remarquer que les trois racines de Q étaient également racines de P et appliquer la Proposition 4 du cours pour obtenir que Q divise P et que, par conséquent, le reste est nul.

Exercice 2.

(1) Pour que la fonction f se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier, il faut qu'elle admette une limite finie en 1 (et que donc les limites à gauche et à droite en cette valeur existent et soient égales). Si $x < 1$, on obtient la limite par composition des limites et en utilisant une limite de référence sur l'exponentielle

$$\lim_{x\to 1^-} a\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{u\to 0^-} a\frac{e^u - 1}{u} = a.$$

Si $x > 1$, on multiplie par l'expression conjuguée

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{6x-5}-b}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{6x-5-b^2}{(x-1)(\sqrt{6x-5}+b)} = \left\{\begin{array}{ll} 3, & \text{si } b=1 \\ -\infty, & \text{si } b>1 \\ +\infty, & \text{si } b<1 \end{array}\right.$$

Il est donc d'une part nécessaire que b soit égal à 1 (pour obtenir une limite finie) et que a soit égal à 3 pour que les limites à gauche et à droite de 1 coïncident.

(2) On utilise (comme dans les exemples du cours) les inégalités sur la partie entière. Comme $a, b > 0$, pour tout $x \neq 0$, on a
$$\frac{b}{ax} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{ax}.$$
Si $x > 0$, on obtient
$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \leq \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}$$
et si $x < 0$,
$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} \geq \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \geq \frac{b}{a}.$$
Dans les deux cas, le théorème des gendarmes permet de conclure que
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}.$$
Pour l'autre limite, on constate que, si $0 < x < a$, alors $\frac{a}{x} \in]0;1[$ et donc $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = 0$, ce qui donne
$$\lim_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = 0.$$
D'autre part, si $-a < x < 0$, on a $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = -\frac{b}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x} = +\infty$.

Exercice 3. Pour $n \geq 0$, on définit le polynôme $P_n(X)$ par
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

(1) En faisant bien attention au fait que $0! = 1$ (et que $X^0 = 1$), on voit que $P_0(X) = 1$ et n'a donc aucune racine réelle (c'est le polynôme constant égal à 1); $P_1(X) = 1 + X$ et admet donc pour unique racine -1 et enfin $P_2(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2}$ qui est de signe constant strictement positif et n'a donc aucune racine.

(2) On dérive "terme à terme", c'est à dire qu'on utilise le fait que la dérivée d'une somme (finie) est égale à la somme des dérivées
$$\begin{aligned} P'_{n+1}(X) &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{X^k}{k!}\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k\frac{X^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{X^k}{k!} \\ &= P_n(X). \end{aligned}$$

(3) L'initialisation est vérifiée à la Question (1). Supposons donc que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On va montrer l'hérédité en distinguant deux cas, selon la parité de n:

- Si $n+1$ est impair, alors n est pair. Par hypothèse de récurrence, P_n ne s'annule jamais et est donc de signe constant. Ce signe est le même que celui du coefficient dominant qui est $1/n!$ et donc positif. Ainsi P_n est strictement positif sur $\mathbb{R}$, mais c'est la dérivée de P_{n+1} qui est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'autre part, le degré de P_{n+1} étant impair, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une seule solution à l'équation $P_{n+1}(x) = 0$. Ceci combiné à la stricte croissance de cette même fonction, on peut déduire de l'unicité de la solution, que l'on note a_{n+1}. La stricte croissance, assure également que $P_{n+1}(x) < 0$ (resp. > 0) est équivalent à $x < a_{n+1}$ (resp. $x > a_{n+1}$). C'est bien la propriété au rang $n+1$ lorsque $n+1$ est impair.

- Si $n+1$ est pair, alors n est impair. Par hypothèse de récurrence, les informations sur le signe de P_n (qui est la dérivée de P_{n+1}) nous permettent de dresser le tableau de variations de P_{n+1}:

x	$-\infty$		a_n		$+\infty$
$P_n(x)$		$-$	0	$+$	
P_{n+1}	$+\infty$	$\searrow$	$P_{n+1}(a_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

  Ainsi, P_{n+1} admet un minimum en a_n. Il faut donc évaluer ce minimum et montrer qu'il est strictement positif. On voit que, comme $P_{n+1}(X) = P_n(X) + \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}$

$$P_{n+1}(a_n) = P_n(a_n) + \frac{(a_n)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(a_n)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  Or $a_n \neq 0$ (car $P_n(0) = 1$) et $n+1$ est pair. Une puissance paire d'un nombre non nul est toujours strictement positive. Ainsi, le minimum de P_{n+1} est strictement positif et la fonction est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Il suit que P_{n+1} n'a aucune racine, ce qui termine la récurrence.

Exercice 4. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & X^2P'(X) + X - 1. \end{array}$$

Attention, cette application prend en argument un polynôme et "renvoie" un polynôme. On peut essayer (et c'est d'ailleurs recommandé) de voir ce que l'application fait précisément sur des exemples de polynômes pour se faire une idée (en général on regarde sur des polynômes assez simples, comme 1, X, X^2, etc...)

$$\begin{array}{lclcl} \Phi(1) & = & X^2 \times 0 + X - 1 & = & X - 1 \\ \Phi(X) & = & X^2 \times 1 + X - 1 & = & X^2 + X - 1 \\ \Phi(X^2) & = & X^2 \times 2X + X - 1 & = & 2X^3 + X - 1 \\ \Phi(X^3) & = & X^2 \times 3X^2 + X - 1 & = & 3X^4 + X - 1 \end{array}$$

(1) Sur les exemples précédents, le degré de $\Phi(P)$ vaut exactement $\deg P + 1$. C'est vrai pour tout polynôme non nul (si $P = 0$, alors $\Phi(P) = X - 1$). Si $P \neq 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$ et donc $\deg (X^2 \times P') = \deg P' + 2 = \deg P - 1 + 2 = \deg P + 1$. En rajoutant $X - 1$ on ne change pas le degré, sauf si $\deg P + 1 \leq 1 \iff \deg P \leq 0 \iff \deg P = 0$. Mais si P est constant, alors $P' = 0$ et donc $\Phi(P) = X - 1$ et on a encore $\deg \Phi(P) = \deg P + 1$. Dans tous les cas, si bien sûr $P \neq 0$, on a la formule annoncée.

(2) Notons $a_0, a_1, ..., a_n$ les coefficients de P et $b_0, b_1, ..., b_{n+1}$ les coefficients de $\Phi(P)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\Phi(P)(X) &= X^2\left(na_nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+...+2a_2X+a_1\right)+X-1\\ &= na_nX^{n+1}+(n-1)a_{n-1}X^n+...+2a_2X^3+a_1X^2+X-1\end{aligned}$$

et on a la relation

$$b_k=(k-1)a_{k-1},\quad 2\leq k\leq n+1,\qquad b_1=1,\quad \text{et}\quad b_0=-1.$$

(3) On en déduit l'écriture du programme suivant.

```
function y=phi(P)
    n=length(P);
    y=zeros(1,n+1);
    y(1)=-1; //coefficient constant de phi(P)
    y(2)=1; //coefficient de degré 1 de phi(P)
    for i=3:n+1
        y(i)=(i-2)*P(i-1) //y(i) coefficient de degré i-1 de phi(P)
    end
endfunction
```