Devoir Maison n°12

À rendre le 02 Février

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $f(x)/x \longrightarrow \ell < 1$, lorsque $x \to +\infty$. Montrer que f possède un point fixe. (On distinguera le cas $f(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$ puis on écrira, dans le second cas, la définition de la limite supposée.)

Exercice 2. On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) \ : \ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.
   (a) Expliciter f_1 et dresser son tableau de variations.
   (b) Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1), après avoir écrit l'expression de f_1 sous la forme d'une fraction dont on aura factorisé le dénominateur.

(2) **Dénombrement des racines de (E_n).**
   (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
   (b) Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n).
   (a) Justifier que $x_n > 0$.
   (b) Démontrer que pour tout réel $x > 1$
   $$\frac{1}{x} < \ln \frac{x}{x-1} < \frac{1}{x-1}.$$
   (c) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $x > 0$, on a
   $$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a$$
   puis, que
   $$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$
   (d) En utilisant l'inégalité de droite, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a
   $$x_n > \frac{2n}{\exp a - 1}.$$
   (e) Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1 + \dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?
   (f) En déduire que le quotient de x_n par $\dfrac{2n}{e^a - 1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.