Devoir Maison n°12

Solution

Exercice 1. Si $f(0) = 0$, on a tout de suite un point fixe sans effort. Supposons alors que $f(0) \neq 0$. Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(0) > 0$. On cherche un point fixe pour f, c'est à dire qu'on cherche une solution de l'équation $f(x) - x = 0$. On va essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. On sait déjà que $g(0) > 0$. Cherchons alors une valeur dont l'image par g sera strictement négative. Par hypothèse, il existe $\ell < 1$ tel que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A \geq 0,\ x \geq A \Longrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \ell \right| < \epsilon.$$

Ceci veut dire que, pour x assez grand, $f(x)/x$ sera aussi proche que l'on veut de la limite ℓ. Si une quantité se rapproche d'une quantité strictement plus petite que 1, la première des deux quantités sera strictement plus petite que 1 à partir d'un moment. Ceci s'écrit

$$\exists A \geq 0,\ \forall x \geq A,\ \frac{f(x)}{x} < 1.$$

Mais alors, pour $x \geq A$, on a $f(x) < x$ c'est à dire $g(x) < 0$. On est donc assuré de l'existe d'un x (en fait on en a une infinité) pour lequel g est strictement négative. Par le TVI, g s'annule au moins une fois et on a donc l'existence d'au moins un point fixe.

Exercice 2. On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a = \dfrac{11}{6}$ et $n = 1$.

(a) On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{6}.$$

La fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout x dans l'ensemble de définition. Ainsi, f_1 est strictement décroissante sur chacun des trois intervalles qui forment l'ensemble de définition de la fonction. On a le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f_1	$-\frac{11}{6}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\frac{11}{6}$

(b) On peut déjà remarquer que, grâce au tableau de variation ci-dessus (et le théorème des valeurs intermédiaires), on est certain qu'il y a 3 racines: une entre -2 et -1, une entre 1 et 0 et une strictement positive. Afin de les déterminer, on commence par exprimer f_1 comme une fraction, c'est à dire qu'on met l'expression précédente au même dénominateur

$$f_1(x) = \frac{-11x^3 - 15x^2 + 14x + 12}{6x(x+1)(x+2)}.$$

On voit que $f_1(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine de l'équation. On va factoriser le numérateur (qui est un polynôme de degré 3, en commençant par diviser par $x - 1$). On trouve (par identification ou division euclidienne)

$$f_1(x) = \frac{-(x-1)(11x^2 + 26x + 12)}{6x(x+1)(x+2)}.$$

On trouve les deux dernières racines, via calcul du discriminant:

$$\frac{-13 - \sqrt{37}}{11} \simeq -1,73 \qquad \text{et} \qquad \frac{-13 + \sqrt{37}}{11} \simeq -0,63.$$

(On constate bien que tout cela est cohérent avec les remarques précédentes.)

(2) **Dénombrement des racines de (E_n).**

(a) La fonction f_n admet $2n+1$ valeurs interdites, qui sont $0, -1, -2, ..., -2n$. Son ensemble de définition s'écrit comme réunion d'intervalles sur chacun desquels la fonction est (continue et) dérivable

$$\mathcal{D}_{f_n} =]-\infty; -2n[\cup]-2n, -2n+1[\cup \cdots \cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$$

Sa dérivée vaut

$$f_n'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - ... - \frac{1}{(x+2n)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_n}$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur chacun des intervalles précédents. Il est également facile de déterminer les limites aux différentes extrémités. On a donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-2n$		$-2n+1$		$\cdots$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f_n	$-a$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-a$

(b) Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n étant continue strictement décroissante sur chaque intervalle $]-k;-k+1[$ (pour $1 \leq k \leq 2n$), il existe un unique antécédent de 0 par f_n sur chacun de ces $2n$ intervalles. De plus, $a > 0$, donc il existe également un unique antécédent sur $]0;+\infty[$. Au total, on a $2n+1$ solutions de l'équation.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

(a) D'après la question précédente, il n'y a qu'une seule racine strictement positive, et il y en a toujours une. C'est donc la plus grande des racines, et celle que l'on nomme x_n. Ainsi, $x_n > 0$.

(b) Les inégalités demandées se démontrent en étudiant les fonctions suivantes, pour $x > 1$,

$$\phi : \ x \mapsto \frac{1}{x} - \ln \frac{x}{x-1} \qquad \text{et} \qquad \psi : \ x \mapsto \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}.$$

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle concerné. On dresse leurs tableaux de variations, afin d'étudier leurs extremums éventuels.

- Étude de ϕ: on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)} > 0.$$

x	1		$+\infty$
$\phi'(x)$	$\|\|$	$+$	
ϕ	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0

et l'inégalité de gauche dans l'encadrement est ainsi démontrée.

- Étude de ψ: on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2} > 0.$$

x	1		$+\infty$
$\psi'(x)$	$\|\|$	$+$	
ψ	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0

et l'inégalité de droite dans l'encadrement est également démontrée.

(c) On commence par calculer explicitement le même de gauche

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k}.$$

Grâce à la question précédente, on sait que, pour chaque $1 \leq k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{x+k} < \ln \frac{x+k}{x+k-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} + a &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k} \\ &< \sum_{k=1}^{2n} \ln \frac{x+k}{x+k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) \\ &= \ln(x+2n) - \ln(x) \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &= \ln \frac{x+2n}{x} \\ &= \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La preuve de la seconde inégalité est en tout point analogue (en utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement obtenu) la question précédente). L'inégalité étant vraie pour tout $x > 0$, on l'applique à x_n, ce qui donne immédiatement (sachant que $f_n(x_n) = 0$)

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

(d) En ne regardant que l'inégalité de droite, on a tout de suite

$$\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n} < a,$$

ce qui donne, en passant à l'exponentielle,

$$1 + \frac{2n}{x_n} < e^a,$$

ou encore

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.$$

(e) Comme $a > 0$, on a $e^a - 1 > 0$ et la limite du terme de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison, il suit que x_n tend également vers $+\infty$. Mais alors, le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

permet de conclure que

$$\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) \longrightarrow a, \; n \to +\infty.$$

(f) La dernière observation entraîne, par composition par l'exponentielle (qui est continue) que

$$\frac{2n}{x_n} \longrightarrow e^a - 1 \Longleftrightarrow \frac{2n}{e^a - 1} \times \frac{1}{x_n} \longrightarrow 1,$$

ce qui veut dire, qu'à l'infini, $\frac{2n}{e^a-1}$ es un *équivalent* de x_n.