
Devoir Maison n°12

Solution

Exercice 1. Si $f(0) = 0$, on a tout de suite un point fixe sans effort. Supposons alors que $f(0) \neq 0$. Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(0) > 0$. On cherche un point fixe pour f , c'est à dire qu'on cherche une solution de l'équation $f(x) - x = 0$. On va essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. On sait déjà que $g(0) > 0$. Cherchons alors une valeur dont l'image par g sera strictement négative. Par hypothèse, il existe $\ell < 1$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \geq 0, x \geq A \implies \left| \frac{f(x)}{x} - \ell \right| < \epsilon.$$

Ceci veut dire que, pour x assez grand, $f(x)/x$ sera aussi proche que l'on veut de la limite ℓ . Si une quantité se rapproche d'une quantité strictement plus petite que 1, la première des deux quantités sera strictement plus petite que 1 à partir d'un moment. Ceci s'écrit

$$\exists A \geq 0, \forall x \geq A, \frac{f(x)}{x} < 1.$$

Mais alors, pour $x \geq A$, on a $f(x) < x$ c'est à dire $g(x) < 0$. On est donc assuré de l'existence d'un x (en fait on en a une infinité) pour lequel g est strictement négative. Par le TVI, g s'annule au moins une fois et on a donc l'existence d'au moins un point fixe.

Exercice 2. On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n) : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} = a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n , de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} - a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a = \frac{11}{6}$ et $n = 1$.

(a) On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{11}{6}.$$

La fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$. Sa dérivée vaut

$$f'_1(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout x dans l'ensemble de définition. Ainsi, f_1 est strictement décroissante sur chacun des trois intervalles qui forment l'ensemble de définition de la fonction. On a le tableau de variations suivant:

(b) Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f_n étant continue strictement décroissante sur chaque intervalle $] -k; -k+1[$ (pour $1 \leq k \leq 2n$), il existe un unique antécédent de 0 par f_n sur chacun de ces $2n$ intervalles. De plus, $a > 0$, donc il existe également un unique antécédent sur $]0; +\infty[$. Au total, on a $2n+1$ solutions de l'équation.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n) .

(a) D'après la question précédente, il n'y a qu'une seule racine strictement positive, et il y en a toujours une. C'est donc la plus grande des racines, et celle que l'on nomme x_n . Ainsi, $x_n > 0$.

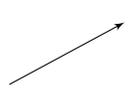
(b) Les inégalités demandées se démontrent en étudiant les fonctions suivantes, pour $x > 1$,

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}.$$

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle concerné. On dresse leurs tableaux de variations, afin d'étudier leurs extremums éventuels.

- Étude de ϕ : on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

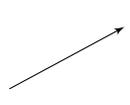
$$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)} > 0.$$

x	1	$+\infty$
$\phi'(x)$		+
ϕ		$-\infty$  0

et l'inégalité de gauche dans l'encadrement est ainsi démontrée.

- Étude de ψ : on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

$$\psi'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2} > 0.$$

x	1	$+\infty$
$\psi'(x)$		+
ψ		$-\infty$  0

et l'inégalité de droite dans l'encadrement est également démontrée.

(c) On commence par calculer explicitement le même de gauche

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k}.$$

Grâce à la question précédente, on sait que, pour chaque $1 \leq k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{x+k} < \ln \frac{x+k}{x+k-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} + a &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k} \\ &< \sum_{k=1}^{2n} \ln \frac{x+k}{x+k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) \\ &= \ln(x+2n) - \ln(x) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \ln \frac{x+2n}{x} \\ &= \ln \left(1 + \frac{2n}{x} \right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La preuve de la seconde inégalité est en tout point analogue (en utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement obtenu) la question précédente). L'inégalité étant vraie pour tout $x > 0$, on l'applique à x_n , ce qui donne immédiatement (sachant que $f_n(x_n) = 0$)

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

(d) En ne regardant que l'inégalité de droite, on a tout de suite

$$\ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n} < a,$$

ce qui donne, en passant à l'exponentielle,

$$1 + \frac{2n}{x_n} < e^a,$$

ou encore

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.$$

(e) Comme $a > 0$, on a $e^a - 1 > 0$ et la limite du terme de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison, il suit que x_n tend également vers $+\infty$. Mais alors, le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

permet de conclure que

$$\ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) \longrightarrow a, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

(f) La dernière observation entraîne, par composition par l'exponentielle (qui est continue) que

$$\frac{2n}{x_n} \longrightarrow e^a - 1 \iff \frac{2n}{e^a - 1} \times \frac{1}{x_n} \longrightarrow 1,$$

ce qui veut dire, qu'à l'infini, $\frac{2n}{e^a - 1}$ est un *équivalent* de x_n .