Devoir Maison n°13

À rendre le 17 Février

Exercice 1. (Puissances de matrices, 3 méthodes). On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire A_n en fonction de n, de trois manières différentes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Formule du binôme**.

(a) On introduit la matrice N définie par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer N^2 et exprimer le résultat en fonction de N. En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de N^n.

(b) Exprimer A en fonction de N et I_3.

(c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que

$$A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-2)^{n-k} \right) N.$$

(d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(2) **Polynôme annulateur et division euclidienne.**

(a) Vérifier que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(3) **Matrice diagonale.**

(a) Vérifier que la matrice P, définie ci-dessous, est inversible et calculer P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Calculer D^n en fonction de n.

(c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

(4) **Application.** On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies pars

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 3, \qquad z_0 = 2$$

et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -2x_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= -2z_n \end{cases}.$$

Déterminer l'expression du terme général de chacune des trois suites.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les deux fonctions f_n et h_n définies par

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

(1) Après avoir précisé l'ensemble de définition de h_n et justifié qu'elle y était dérivable, dresser le tableau de variations de h_n.
(2) Calculer $h_n(0)$. En déduire le signe de h_n.
(3) Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
  (a) Établir une relation entre f_1' et h_1.
  (b) En déduire les variations de f_1 sur son ensemble de définition.
(4) On suppose maintenant que $n \neq 1$. Répondre aux deux mêmes questions que précédemment, en distinguant n pair et n impair.
(5) On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, à l'équation

$$(E_n) \qquad x^n \ln(1+x) = 2.$$

  (a) Justifier que l'équation (E_n) admet une unique solution positive, que l'on notera v_n.
  (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 \leq v_n \leq 2$.
  (c) Déterminer le sens de variation de (v_n) (on pourra comparer $f_{n+1}(v_n)$ et $f_{n+1}(v_{n+1})$).
  (d) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite (on pourra commencer par donner un encadrement de la limite ℓ, après avoir justifié de son existence, puis raisonner par l'absurde).

Exercice 3. (Polynômes de Legendre) - `SciLab`

(1) Rappeler les instruction de la fonction `derivepoly()` prenant pour argument un polynôme P, et renvoyant le polynôme P'.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier. Quel est le degré du polynôme $P_n(X) = (X^2-1)^n$? Préciser quels sont les coefficients de ses monômes (on pourra penser à la formule du binôme). En déduire une façon d'implémenter le polynôme P_n sous `SciLab`.
(3) On définit le *$n-$ième polynôme L_n de Legendre* comme dérivée $n-$ième du polynôme P_n, ce qu'on note $L_n = P_n^{(n)}$ (on dérive n fois consécutives le polynôme P_n).
  (a) Quel est le degré de L_n?
  (b) À l'aide des deux premières questions, écrire une fonction `Legendre()` prenant pour argument un entier n et renvoyant le polynôme de Legendre L_n.

☞ *Le dernier exercice est un exercice bonus*

Exercice 4. (Fonctions continues additives)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$(\star) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer **toutes** les fonctions f continues (sur $\mathbb{R}$) qui vérifient cette propriété.

(1) Montrer que si f est linéaire, alors f vérifie $(\star)$.
(2) Soit f une fonction continue vérifiant $(\star)$.
  (a) Que vaut nécessairement $f(0)$?
  (b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.
  (c) Montrer que l'égalité précédente est encore vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
  (d) Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} f(1)$.
  (e) Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la suite (x_n), définie par $x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^\star$), montrer que $f(x) = xf(1)$.
  (f) Conclure quant aux fonctions qui vérifient $(\star)$.