Devoir Maison n°13

Solution

Exercice 1. (Puissances de matrices, 3 méthodes). On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire A_n en fonction de n, de trois manières différentes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Formule du binôme**.

(a) Le calcul direct donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3N.$$

Une récurrence immédiate mène alors à $N^k = 3^{k-1}N$.

(b) On constate sans difficulté que $A = N - 2I_3$.

(c) Les matrices $-2I_3$ et N commutent (car les multiples de l'identité commutent avec toutes les matrices), on peut donc appliquer la formule du binôme (**il est indispensable de vérifier que les matrices commutent et de le mentionner avant de commencer le calcul**)

$$\begin{aligned} A^n &= (N-2I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (-2I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} N^k \\ &= (-2)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} N \\ &= (-2)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k-1} \right) N \\ &= (-2)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^{k} \right) N, \end{aligned}$$

qui est la formule attendue.

(d) On reconnait dans l'égalité précédente la formule du binôme (pour des nombres réels). En effet,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{n-k} 3^k - (-2)^n = (-2+3)^n - (-2)^n = 1 - (-2)^n.$$

Il suit donc que

$$A^n = (-2)^n I_3 + \frac{1-(-2)^n}{3} N$$

ou encore

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} & 1 & \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

(2) **Polynôme annulateur et division euclidienne.**

(a) Pour vérifier que $P(X) = X^2X - 2$ est un polynôme annulateur de A, on calcule $P(A) = A^2 + A - 2I_3$ et on vérifie que le résultat est bien la matrice nulle.

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Afin de déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P, on commence par factoriser P. On trouve immédiatement $P(X) = (X-1)(X+2)$. De plus, P étant de degré 2, le reste de la division euclidienne de X^n par P sera de degré inférieur ou égal à 1. Ainsi, on cherche a_n et b_n tels que

$$X^n = P(X)Q(X) + a_n X + b_n.$$

En injectant dans cette équation les racines de P (1 et -2), on trouve le système suivant

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -2a_n + b_n = (-2)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{1}{3}(1-(-2)^n) \\ b_n = \frac{1}{3}(2+(-2)^n) \end{cases}.$$

(c) On injecte alors A dans la division euclidienne de X^n par $P(X)$ (sachant que $P(A) = 0$), on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q(A) + a_n A + b_n I_3 \\ &= \frac{1}{3}(1-(-2)^n) A + \frac{1}{3}(2+(-2)^n) I_3 \end{aligned}$$

et on retrouve bien

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3(-2)^n & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & 3 & 2+(-2)^{n+1} \\ 0 & 0 & 3(-2)^n \end{pmatrix}.$$

(3) **Matrice diagonale.**

(a) La méthode du pivot de Gauss permet de voir que P est inversible (on obtient rapidement trois pivots non nuls) et le pivot total appliqué simultanément à P et à I_3 permet d'obtenir l'inverse, qui vaut

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) On calcule:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est bien diagonale. On sait facilement calculer les puissances d'une matrice diagonale

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

(c) Par définition, $D = P^{-1}AP$ ce qui permet d'exprimer $A = PDP^{-1}$. On a déjà vu qu'alors,

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 1 & 0 & 2(-2)^n \\ 0 & -(-2)^n & -3(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} & 1 & \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve encore le même résultat. Ouf, sauvés!

(4) **Application.** La méthode pour déterminer l'expression du terme général de chacune des trois suites est d'introduire les objets suivants

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les relations de récurrence définissant les suites susmentionnées permettent alors d'écrire la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$, ce qui, par une récurrence immédiate mène à $X_n = A^nX_0$, ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} & 1 & \frac{2+(-2)^{n+1}}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et donne finalement

$$x_n = (-2)^n; \qquad y_n = 5 + (-2)^{n+1}; \qquad z_n = 2(-2)^n.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les deux fonctions f_n et h_n définies par

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

(1) Pour que h_n soit définie, il faut que l'argument du logarithme soit strictement positif et que le dénominateur ne s'annule pas. On voit donc que h_n est définie sur $]-1;+\infty[$. De plus, en tant que somme de composée de fonctions dérivables sur cet intervalle, elle y est dérivable (et continue!) et

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \qquad x > -1.$$

De plus,

$$h_n(x) = \frac{1}{x-1}\left(n(1+x)\ln(1+x) + x\right) \longrightarrow -\infty,\ x \to -1^+,$$

et on en déduit le tableau de variations

x	-1		$+\infty$
$h_n'(x)$	$\Vert$	$+$	
h_n	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) On voit que $h_n(0) = 0$, on en déduit immédiatement le signe de h_n:

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(3) Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
  (a) On a $f_1(x) = x\ln(1+x)$ et donc $f_1'(x) = h_1(x)$.
  (b) L'étude de h_n à la question précédente nous permet de dresser le tableau suivant

x	-1		0		$+\infty$
$h_1(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_1	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(4) Considérons maintenant $n \neq 1$. Le calcul de la dérivée de f_n donne

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x).$$

Le signe de cette dérivée dépend donc de celui de h_n (que l'on connait grâce aux questions précédentes) mais aussi de celui de x^{n-1} qui varie en fonction de la parité de n. En effet,

- Si n est pair, alors $n-1$ est impair, et x^{n-1} change de signe selon que $x > 0$ ou $x < 0$. Le tableau est le suivant

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
f_n	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Si n est impair, alors $n-1$ est pair et x^{n-1} est toujours positifs ou nul. Le tableau, dans ce cas, est

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f_n	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(5) On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, à l'équation

$$(E_n) \qquad x^n \ln(1+x) = 2.$$

(a) Avec les notations précédentes, x solution de (E_n) est équivalent à $f_n(x) = 2$. Or, d'après l'étude ci-dessus, on voit que, comme (et peu importe la parité de n), f_n est strictement croissante et continue sur $[0;+\infty[$, le théorème de bijection assure que f_n induit une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ (que l'on note également f_n). Ainsi, il existe un unique antécédent de 2 par f_n, que l'on note v_n

$$f_n(v_n) = 2 \iff v_n = f_n^{-1}(2).$$

(b) On compare les images des éléments par f_n. On a $f_n(1) = \ln(2)$ et $f_n(2) = 2^n \ln(3)$. Or, o sait que $\ln(2) < 2$ et que $\ln(3) > 1$ donc $2^n \ln(3) > 2$. La fonction f_n étant strictement croissante, l'encadrement est préservé sur les antécédents

$$f_n(1) < v_n < f_n(2) \iff 1 < v_n < 2.$$

(c) Pour comparer v_n et v_{n+1} (et en déduire le sens de variations de la suite), on compare les images par f_{n+1}. Par définition, $f_{n+1}(v_{n+1}) = 2$. De plus, $v_n > 1$ et donc les puissances de v_n sont rangées dans l'ordre croissant. Ainsi

$$f_{n+1}(v_n) = v_n^{n+1} \ln(1+v_n) > v_n^n \ln(1+v_n) = f_n(v_n) = 2.$$

On a donc obtenu $f_{n+1}(v_n) > f_{n+1}(v_{n+1})$ ce qui donne $v_n > v_{n+1}$ ou encore (v_n) décroissante.

(d) La suite (v_n) est décroissante et minorée. Par le théorème de convergence monotone, elle converge vers ℓ et de l'encadrement sur v_n, on peut déduire que $1 \leq \ell \leq 2$. Mais on sait que

$$v_n^n \ln(1+v_n) = 2 \iff \exp(n\ln(v_n)) \ln(1+v_n) = 2.$$

Si $\ell > 1$, alors $n\ln(v_n) \longrightarrow +\infty$, lorsque $n \to +\infty$ et alors on aboutit à une contradiction. Il suit que, nécessairement, $\ell = 1$.

Exercice 3. (Polynômes de Legendre) - `SciLab`

(1) On rappelle les instructions (déjà abordées en TP) définissant la fonction permettant d'obtenir la dérivée d'un polynôme.

```
function y=derivepoly(P)
    d=length(P);
    y=zeros(1,d-1);
    for i=1:d-1
        y(i)=i*P(i+1);
    end
endfunction
```

(2) Le degré du produit de deux polynômes étant égal à la somme des degrés des deux polynômes, on en déduit que le degré de P_n est égal à $2n$. Par la formule du binôme, on a

$$P_n(X) = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}.$$

Ainsi, le polynôme P_n n'a que des monômes de degrés pairs. On peut donc "remplir" les coefficients du vecteur-ligne représentant le polynôme de deux en deux. On en déduit la suite d'instructions suivante (où on utilise la fonction `combi(n,k)`, introduite dans un TP précédent, qui renvoie $\binom{n}{k}$).

```
y=zeros(1,2*n+1);
for i=1:2:2*n+1
    y(i)=(-1)^(n-(i-1)/2)*combi(n,(i-1)/2);
end
```

(3) (a) Si on dérive n fois un polynôme de degré $2n$, le résultat est un polynôme de degré $2n-n=n$.

(b) On en déduit le programme suivant qui commence par calculer le polynôme P_n puis le dérive n fois consécutives:

```
function y=Legendre(n)
    y=zeros(1,2*n+1);
    for i=1:2:2*n+1
        y(i)=(-1)^(n-(i-1)/2)*combi(n,(i-1)/2);
    end
    for j=1:n
        y=derivepoly(y);
    end
endfunction
```

☞ *Le dernier exercice est un exercice bonus*

Exercice 4. (Fonctions continues additives)
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$(\star) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}, \qquad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer **toutes** les fonctions f continues (sur $\mathbb{R}$) qui vérifient cette propriété.

(1) Si f est linéaire, alors f est bien évidemment continue et il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha x$. Il suit que $(\star)$ est trivialement vérifiée:

$$f(x+y)=\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y=f(x)+f(y).$$

(2) Soit f une fonction continue vérifiant $(\star)$.

(a) On constate que, d'après $(\star)$, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$. Nécessairement, $f(0)=0$.

(b) L'initialisation est triviale. Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}^\star$, $f(n)=f(1)n$. Alors, d'après $(\star)$ et par hypothèse de récurrence

$$f(n+1)=f(1)+f(n)=f(1)+f(1)n=f(1)(n+1),$$

et la récurrence est ainsi démontrée.

(c) Soit $m\in\mathbb{Z}$. Si $m\geq 0$, alors l'égalité demandée est vrai d'après la question précédente. Si $m<0$, alors m est l'opposé d'un entier positif, $-m\in\mathbb{N}$ et l'égalité précédente est vrai si on l'applique à $-m$. Ainsi, toujours d'après $(\star)$,

$$0=f(0)=f(m+(-m))=f(m)+f(-m)=f(m)+f(1)(-m)$$

ce qui est équivalent à

$$f(m) = -f(1)(-m) = f(1)m,$$

et l'égalité s'étend bien à $\mathbb{Z}$.

(d) Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$. D'après les questions précédentes et $(\star)$, on a

$$f(1)p = f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + ... + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + ... + f\left(\frac{p}{q}\right) = q \times f\left(\frac{p}{q}\right)$$

ou encore

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)\frac{p}{q},$$

ainsi l'égalité est vrai sur $\mathbb{Q}$.

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^\star$). Par le théorème des gendarmes, on voit que (x_n) converge vers x:

$$x - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x.$$

Mais on constate que, par construction, $x_n \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, on sait que, $f(x_n) = f(1)x_n$. Par hypothèse de départ, f est continue, on peut donc passer à la limite:

$$f(1)x = \lim_{n \to +\infty} f(1)x_n = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = f(x),$$

et l'égalité se prolonge à tout élément de $\mathbb{R}$.

Remarque. on a montré dans cet exercice que tout élément de $\mathbb{R}$ était limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$. Cette propriété s'appelle la *densité* de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

(f) Il est clair que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$, alors f est linéaire (avec $\alpha = f(1)$). On peut conclure que f vérifie $(\star)$ et est continue si et seulement si f est linéaire. Les seules fonctions continues et additives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires.