Devoir Maison n°14

Solution

Exercice 1. (Utilisation à l'infini de DL en 0).

On constate que la limite cherchée est bien indéterminée. Comme toujours avec un exposant qui varie, on commence par écrire la quantité étudiée sous forme exponentielle

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \exp\left(2x\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\right).$$

La limite désirée étant celle à l'infini, on factorise ensuite, dans le quotient, par $2x$, au numérateur et au dénominateur, afin d'obtenir

$$\exp\left(2x\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\right) = \exp\left(2x\ln\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{2x}}\right)\right).$$

Mais alors, on constate que, lorsque x tend vers $+\infty$, $1/2x$ tend vers 0, et on peut utiliser le premier DL en zéro pour écrire

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2x}} = 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On va alors multiplier ce résultat par $(1+1/2x)$ pour obtenir

$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2x}}\right) = 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

où on a intégré dans le reste $o\left(\frac{1}{x}\right)$ tout ce qui, factorisé par $1/x$ tendait encore vers 0. La limite à calculer est alors

$$\exp\left(2x\ln\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Le second DL en 0 donne alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et alors

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \exp\left(2x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp\left(2+o(1)\right),$$

où $o(1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Mais alors, on peut conclure que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = e^2.$$

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & \text{si } x\neq 0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

(1) Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux telles fonctions dont le numérateur ne s'annule pas. Le problème est donc uniquement en 0. On va alors vérifier que f dérivable en 0, puis que f' est continue en 0. Le taux d'accroissement de f en 0 vaut

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} \longrightarrow 1,\ x \to 0,$$

(c'est la limite usuelle $(e^u-1)/u$ en 0 obtenue justement comme limite du taux d'accroissement de exp en 0). Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. Par ailleurs, si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}.$$

C'est alors grâce au développement limité de exp en 0 que l'on peut calculer la limite de $f'(x)$ en 0. En effet, pour x proche de 0,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$

et il suit qu'on peut écrire (en intégrant au reste toute quantité qui, factorisée par x^2 tend encore vers 0)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2-1)(1+x^2+o(x^2))+1}{x^2} = \frac{2x^2-1-x^2+o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{x^2+o(x^2)}{x^2} \\ &= 1+o(1) \\ &\longrightarrow 1 = f'(0),\ x \to 0 \end{aligned}$$

et f' est alors continue en 0. Il suit que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Notons $h : x \mapsto (2x^2-1)e^{x^2}+1$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $h'(x) = (4x^3+2x)e^{x^2} = 2x(2x^2+1)e^{x^2}$ et il est alors facile de dresser le tableau de variations de h et d'en déduire son signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Mais $h(x)$ représente, pour $x \neq 0$, le numérateur de $f'(x)$. Comme $f'(0)=1$, il suit que $f'(x) > 0$ pour tout x réel, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et f^{-1} a les mêmes variations que f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(3) On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' ne s'annule jamais. Il suit que, par un théorème du cours, f^{-1} est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Or, comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on a $f^{-1}(0) = 0$ et $\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$. Le développement limité de f^{-1} en 0 (dont l'existence est assurée par la dérivabilité de celle-ci en 0) est alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= f^{-1}(0) + \left(f^{-1}\right)'(0)x + o(x) \\ &= x + o(x). \end{aligned}$$

(En particulier, $y = x$ est tangente à la courbe de f^{-1} en 0.)

Exercice 3. (Développement asymptotique d'une suite implicite) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation

$$e^x + x - n = 0 \Longleftrightarrow e^x + x = n$$

(1) On voit très facilement (en dérivant et en utilisant le théorème de bijection) que $f : x \longmapsto e^x + x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, tout entier n a un unique antécédent par f, que l'on note u_n. Et on a, par définition

$$e^{u_n} + u_n = n. \tag{0.1}$$

(2) Puisque f est strictement croissante et bijective, c'est aussi le cas de f^{-1} qui tend également vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Comme

$$f(u_n) = n \Longleftrightarrow u_n = f^{-1}(n),$$

le passage à la limite permet de voir que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(3) On veut alors savoir à quelle "vitesse" la suite (u_n) tend vers l'infini.

(a) Il suffit que factoriser par e^{u_n} dans (0.1) et de prendre le logarithme

$$\begin{aligned} e^{u_n} + u_n = n &\Longleftrightarrow e^{u_n}\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) = n \\ &\Longleftrightarrow \ln\left(e^{u_n}\left(1 + u_n e^{-u_n}\right)\right) = \ln(n) \\ &\Longleftrightarrow u_n + \ln\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) = \ln(n). \end{aligned}$$

(b) On sait que u_n tend vers $+\infty$. Par croissance comparée, $u_n e^{-u_n}$ tend vers 0. On peut alors utiliser le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0:

$$\begin{aligned} \ln(n) &= u_n + \ln\left(1 + u_n e^{-u_n}\right) \\ &= u_n + u_n e^{-u_n} + o(u_n e^{-u_n}) \\ &= u_n\left(1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n})\right), \end{aligned}$$

et il suit que

$$\frac{u_n}{\ln(n)} = \frac{1}{1 + e^{-u_n} + o(e^{-u_n})} \longrightarrow 1,\ n \to +\infty.$$

(c) ⚠ *Cette dernière partie est plus technique (mais instructive).* On pose $v_n = u_n - \ln(n)$.

(i) On remarque que $u_n = v_n + \ln(n)$ et par suite, l'équation (0.1) donne directement $e^{v_n + \ln(n)} + v_n + \ln(n) = n$. Or $e^{\ln(n)} = n$ et donc $e^{v_n + \ln(n)} = n - \ln(n) - v_n$ donne encore

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{v_n}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{v_n}{\ln(n)}\frac{\ln(n)}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n,$$

avec

$$\varepsilon_n = -\frac{v_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - u_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{u_n}{\ln(n)} \longrightarrow 0,\ n \to +\infty.$$

(ii) On prend le logarithme de l'égalité précédente, en utilisant que

$$\ln(1-u) = u + o(u)$$

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n + o\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n\right) \end{aligned}$$

Or,

$$o\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n\right)$$

est une quantité *négligeable* devant $\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n$; c'est à dire qu'une fois factorisée par $\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n$, la quantité en facteur tend vers 0. On factorise pour écrire

$$\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n}\left(1 - \varepsilon_n\right).$$

Mais, ε_n tendant vers 0, on constate que

$$o\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n\right) = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

(On invite le lecteur à réfléchir sur cette dernière égalité et l'utilisation de la notation o.) Mais alors, évidemment,

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n + o\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n\right) &= -\frac{\ln(n)}{n}\varepsilon_n + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

Il suit que

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\epsilon_n,$$

où ϵ_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On vient d'obtenir un développement asymptotique de la suite (u_n). *Le terme principal de la suite se comporte comme du* $\ln(n)$. *Le reste (c'est à dire la différence entre* u_n *et* $\ln(n)$*) tend vers* 0 *à la vitesse de* $\ln(n)/n$. *Ce qu'il reste est négligeable devant* $\ln(n)/n$. *Néanmoins, on pourrait pousser le développement plus loin, mais cela nécessiterait beaucoup plus de travail, très technique!*