Devoir Maison n°15

À rendre le 9 Mars

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

(1) **Étude de f.**
- (a) Étudier les variations de f (en particulier ses limites en $\pm\infty$).
- (b) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - f(-x)$ et en déduire une symétrie de la courbe représentative de f.
- (c) Calculer la dérivée seconde de f et déterminer les points d'inflexion de sa courbe représentative.
- (d) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

(2) **Solutions de l'équation** $(E) : f(x) = x$.
- (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ équivaut à $(1-x)e^x - x = 0$.
- (b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x - x$ et en déduire que (E) a une unique solution que l'on notera α et qu'elle appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
- (c) Tracer sur un même graphique la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

(3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (a) Montrer qu'elle est croissante.
- (b) Montrer qu'elle converge vers α.
- (c) Écrire un programme en `SciLab` qui demande et saisit une valeur n et affiche la valeur de u_n.

(4) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
- (a) Montrer que pour tout entier n, $v_n \geq 0$.
- (b) En déduire que pour tout entier n, $|v_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$ puis que la suite v converge également vers α.
- (c) Écrire un programme en `SciLab` qui demande et saisit une valeur ε et affiche une valeur approchée de α à ε près.