ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°15

Solution

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

(1) **Étude de f.**

(a) Les fonction $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x + 1$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent jamais. Ainsi, la fonction f, définie comme leur quotient, a également la même régularité. Ce n'est pas demandé, mais cela permet de justifier qu'on peut dériver plusieurs fois en toute légalité, et qu'on est bien content. On n'attend d'ailleurs pas plus pour écrire que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et implique donc la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, et qu'on factorise par e^x au numérateur et au dénominateur pour déterminer la limite en $+\infty$, on peut écrire sans peine que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

et le tableau de variations (qui fait toujours plaisir) est le suivant:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	1

(b) On part du membre de droite

$$\begin{aligned} 1 - f(-x) &= 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x e^{-x}}{e^x e^{-x} + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

ce qui assure que le point de coordonnées $(0; 1/2)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f (on renvoie le lecteur à la Proposition 2. de la fiche *Compléments sur la parité et les symétries* disponible avec le Chapitre 1 sur son site internet préféré).

(c) On dérive f' afin d'obtenir la dérivée seconde de f:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}, \end{aligned}$$

expression dont le signe est donné par celui de $1-e^x$ qu'on sait parfaitement déterminer. Notamment, cette dérivée seconde ne s'annule qu'en $x=0$ et elle y change de signe. On peut donc conclure que le point d'abscisse 0 est le seul point d'inflexion de la courbe. Ses coordonnées sont $(0;1/2)$ (c'est également le centre de symétrie trouvé précédemment).

(d) Outre la détermination des points d'inflexion, la dérivée seconde nous permet, grâce à son signe, de voir que f' est décroissante sur $[0;+\infty[$. Ainsi, son maximum est donc atteint en $x=0$. Il suit que, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{2},$$

et on a bien l'inégalité demandée. On remarque que, comme $f'(x) > 0$, on a en fait

$$\forall x \geq 0, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(2) **Solutions de l'équation** $(E) : f(x) = x$.

(a) Il est très facile de reformuler l'équation (E):

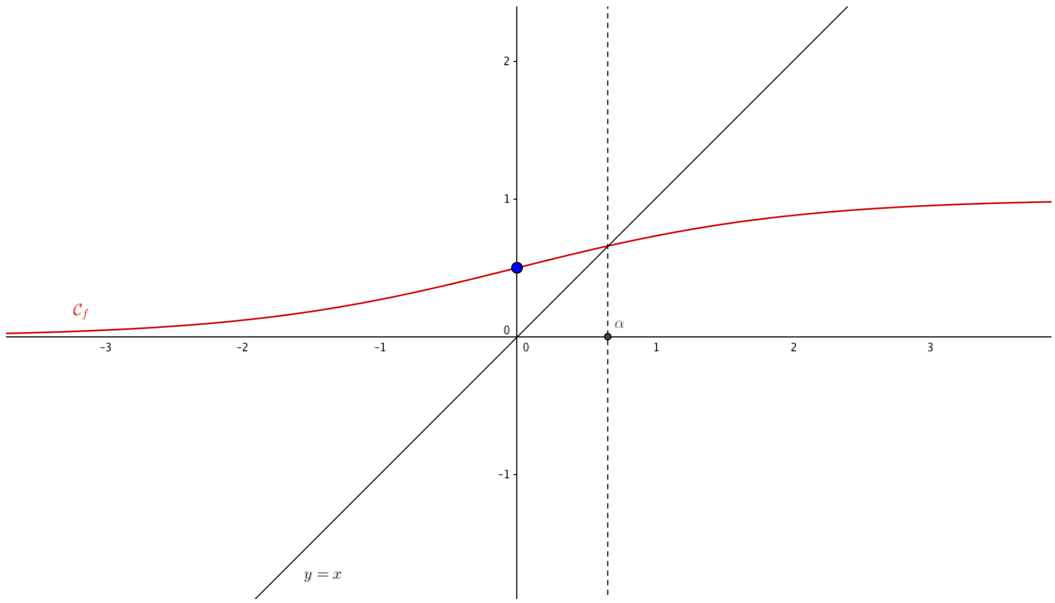
$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\iff \quad e^x = x(1+e^x) \iff e^x(1-x) = x \\ &\iff \quad e^x(1-x) - x = 0. \end{aligned}$$

(b) La fonction $g: \; x \mapsto e^x(1-x) - x$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$, donc (au moins deux fois) dérivable, sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et on a $g'(x) = -xe^x - 1$, quantité dont on n'obtient pas le signe directement et qu'on décide alors de dériver à nouveau: $g''(x) = -(x+1)e^x$. On peut alors écrire dresser la suite de tableaux suivants dont découlent les variations de g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g'	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e} - 1 < 0$	$\searrow$	$-\infty$
$g'(x)$			$-$		
g	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

Par le théorème de bijection, la stricte décroissance de g combinée au fait que celle-ci est continue entraînent que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent α sur $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent, par la question précédente, au fait que (E) a pour unique solution α. On peut de plus préciser que, comme $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 > 0$, on a $0 < \alpha < 1$.

(c) Les éléments demandés sont représentés ci-dessous.



(3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) On montre par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$. Tout d'abord, $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1/2 > u_0$, et l'initialisation est vérifiée. Le caractère héréditaire découle immédiatement de la croissance de f. Ainsi, (u_n) est bien croissante.

On pouvait aussi déterminer la monotonie de (u_n) à l'aide du signe de g. Il fallait pour cela commencer par vérifier, par récurrence, que tous les termes de la suite étaient compris dans l'intervalle $[0; \alpha]$, sur lequel la fonction g est positive.

(b) La suite (u_n) est croissante. Afin de s'assurer de sa convergence, on montre qu'elle est majorée et on applique le théorème de convergence monotone. La limite ne pouvant être qu'un point fixe de f (car f étant continue, le passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ implique que, si ℓ est la limite de (u_n), alors $\ell = f(\ell)$), la suite convergera nécessairement vers α. On montre alors qu'elle est majorée, à l'aide de la croissance de f. On peut choisir α ou 1 comme majorant, il n'y a pas unicité de la démonstration. On a juste besoin d'*un* majorant (qui doit quand même vérifier $f(M) \leq M$ afin que la récurrence puisse être montrée). Prenons 1. Si $u_n \leq 1$, alors comme f croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = e/(1+e) \leq 1$, et c'est gagné.

(c) Le programme est classique et on en a déjà écrit dix mille du même genre. Cela dit, dans un souci d'exhaustivité de cette correction passionnante, on en fait apparaître une version ci-dessous.

```
n=input("Entrer le rang n de la suite :");
u=0;
for i=1:n
    u=exp(u)/(1+exp(u));
end
disp(u, "Le terme de rang demandé est ")
```

(4) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

(a) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, il suit, par une récurrence vraiment immédiate, que $u_n > 0$ pour tout entier n.

(b) L'inégalité telle qu'elle est demandée et les questions précédentes nous permettent de penser immédiatement à l'inégalité des accroissements finis. Comme tous les termes de la suite sont positifs, que $\alpha \geq 0$, et que $|f'(x)| \leq 1/4$ pour tout $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - \alpha| &= |f(v_n) - f(\alpha)| \\ &\leq \frac{1}{4}|v_n - \alpha| \qquad \text{(D'après l'I.A.F).} \end{aligned}$$

Comme $v_0 - \alpha = 1 - \alpha \leq 1$, une récurrence rapide montre que $|u_n - \alpha| \leq (1/4)^n$:

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{4}|v_n - \alpha| \qquad \text{(Par I.A.F)} \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{(Par HR)} \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $(1/4)^n \longrightarrow 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $|v_n - \alpha| \longrightarrow 0$, ou encore que $v_n \longrightarrow \alpha$, $n \to +\infty$.

(c) D'après ce qu'on vient de voir, si n est tel que $(1/4)^n < \varepsilon$, alors u_n approche α à ε près. Le programme est alors facile à écrire:

```
e=input("Entrer la precision voulue :");
u=0;
n=0;
while (1/4)^n >=e
    u=exp(u)/(1+exp(u));
    n=n+1;
end
disp(u,"près est ",e, "Une approximation de alpha à ")
```