Devoir Maison n°16

À rendre le 6 Avril

Exercice 1. On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6 (on suppose tous les lancers indépendants). Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs?

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
(2) Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
(3) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & f^{-1}(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

est bien définie (*i.e.* que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0;1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x \geq 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(5) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
   (b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$

   (c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.
   (d) Montrer finalement que

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n e^L u_n = 1.$$

La dernière question permet d'expliciter un ***équivalent*** *de la suite u_n. C'est à dire que, à l'infini, on sait comment se comporte u_n:*

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}.$$

Exercice 3. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$. Sa courbe, dans un reprère orthonormé (d'unité graphique 2cm) est notée $\mathcal{C}$ et on donne $\ln(2) \simeq 0.69$.

(1) **Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.**
   (a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.
   (b) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de f puis étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
   (c) Calculer $f"(x)$. Déterminer les points d'inflexion de la courbe.
   (d) Tracer $\mathcal{C}$. On précisera les tangentes à l'origine et aux points d'inflexion.

(2) **Étude d'une suite et d'une séries associées à** f. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = f(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, qu'elle converge et préciser sa limite.

(b) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$,

$$f(x) \leq x - \frac{x^2}{2}.$$

(c) En déduire que, pour tout entier n, $u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

(d) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.