ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°16

Solution

Exercice 1. On introduit, pour tout entier $n \geq 1$, l'évènement A_n "les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le $n-$ième donne 6". L'évènement cherché est alors

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

Par ailleurs les évènements étant deux à deux incompatibles, on a

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

De plus, les lancers étants supposés indépendants et le dé équilibré, on sait que

$$P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6},$$

et donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$ comme produit de telles fonctions et on peut notamment calculer sa dérivée. On obtient $f'(x) = 2(x+1)e^x$, quantité strictement positive sur $[0;1]$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0;1]$ et le théorème de bijection assure qu'elle réalise donc une bijection de $[0;1]$ sur $[f(0); f(1)] = [0; 2e]$. Sa bijection réciproque f^{-1} a les mêmes variations que f et est donc croissante sur $[0; 2e]$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	$2e$

x	0	$2e$
f^{-1}	0 $\nearrow$	1

(2) On voit que l'équation $\alpha e^{\alpha} = 1$ est équivalente à $f(\alpha) = 2$. Or, 2 est un élément de $[0; 2e]$ et par conséquent admet un unique antécédent α par f dans $[0; 1]$. Comme $f(0) = 0$, on a de plus $\alpha \neq 0$.

(3) Montrons par récurrence que chaque terme de la suite est bien défini et que, de plus, $0 < u_n \leq 1$. C'est trivialement le cas pour $n = 0$ d'après la définition de u_0. Supposons donc que ce soit vrai pour un certain entier $n \geq 0$. Comme $u_n \in]0; 1] \subset [0; 2e]$, u_n est dans l'ensemble de définition de f^{-1} et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ est bien défini. Comme, de plus, f^{-1} est strictement croissante et que $f^{-1}(0) = 0$, le fait que $u_n > 0$ implique directement $u_{n+1} > 0$. De plus, pour tout $x \in [0; 2e]$, $f^{-1}(x) \leq 1$, donc $u_{n+1} \leq 1$, et la récurrence est ainsi démontrée.

(4) $f(x) - x = x(2e^x - 1)$. Pour tout $x \in]0; 1]$, $2e^x - 1 > 0$ et $f(0) = 0$. On a bien le résultat demandé.

(5) On commence par remarquer que $u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \iff u_n = f(u_{n+1})$. Comme, pour tout $n \geq 0$, $u_n \in]0; 1]$, on a que

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - f(u_{n+1}) < 0,$$

et (u_n) est strictement décroissante. La suite étant minorée par 0, le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers une limite ℓ. Par continuité de f^{-1}, le passage à la limite dans la définition de la suite donne $f^{-1}(\ell) = \ell$ ce qui est équivalent à $f(\ell) = \ell$. Mais alors

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff f(\ell) - \ell = 0 \\ &\iff \ell = 0. \end{aligned}$$

(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

(a) On voit que

$$\begin{aligned} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) &\iff f(u_{n+1}) = u_n \\ &\iff 2u_{n+1}e^{u_{n+1}} = u_n \\ &\iff u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) Pour $n = 0$, on a, par définition de α, $u_0 = \alpha = e^{-\alpha} = \frac{e^{-u_0}}{2^0}$. Supposons que l'égalité soit vraie pour un certain $n \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} && \text{(D'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{-S_n}}{2^n}e^{-u_{n+1}} && \text{(D'après HR)} \\ &= \frac{e^{-(S_n+u_{n+1})}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

(c) Les termes de la suite (u_n) sont tous (strictement) positifs. Il suit notamment que $e^{-S_n} \leq 1$ et donc que $u_n \leq (1/2)^n$. Or, $\sum (1/2)^n$ est une série géométrique convergente. Par comparaison des séries à termes positifs, il suit que $\sum u_n$ est également une série convergente dont on note L la somme et il est alors clair que

$$\alpha = u_0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = L \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

(d) En reprenant le résultat de la question (b)

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n} \iff 2^n e^L u_n = e^{L-S_n} \implies \lim_{n\to+\infty} 2^n e^L u_n = 1$$

car $L - S_n \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$.

*La dernière question permet d'expliciter un **équivalent** de la suite u_n. C'est à dire que, à l'infini, on sait comment se comporte u_n:*

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}.$$

Exercice 3. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$. Sa courbe, dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2cm) est notée $\mathcal{C}$ et on donne $\ln(2) \simeq 0.69$.

(1) **Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$.**

(a) On dérive avec les formule usuelles

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$$

La dérivée de f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en $x = 1$. La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(x) = x - \ln(1+x^2) = x\left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = x\left(1 - 2\frac{\ln(|x|)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x}\right)$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Un tableau de variations faisant toujours plaisir, on ne s'en prive pas

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

(b) Pour étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$, on commence par calculer la limite de $f(x)/x$. D'après l'écriture de f obtenue ci-dessus,

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2\frac{\ln(|x|)}{x} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{x} \longrightarrow 1,\ x \to \pm\infty.$$

Mais comme

$$f(x) - 1x = -\ln(1+x^2) \longrightarrow -\infty,\ x \to \pm\infty$$

on peut conclure que la courbe de f présente deux branches paraboliques de direction $y = x$ qu'elle regarde par en dessous dans les deux cas.

(c) Le calcul donne

$$f''(x) = \frac{-2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

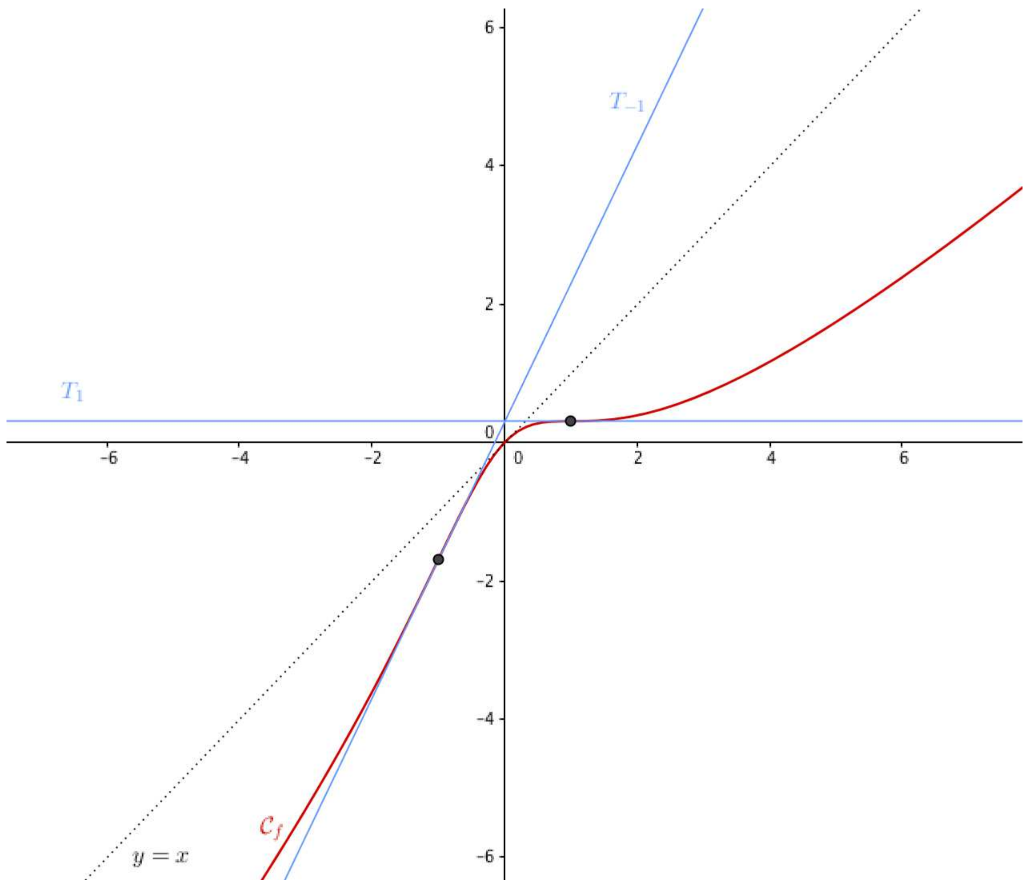
Et il est facile d'établir le tableau de signe de cette dérivée seconde

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il y a donc deux points d'inflexion $(-1; -1 - \ln(2))$ et $(1; 1 - \ln(2))$.

(d) Les équations des tangentes sont

$$\begin{aligned} T_0 &: \; y = f'(0)x + f(0) = x \\ T_{-1} &: \; y = f'(-1)(x+1) + f'(-1) = 2x + 1 - \ln(2) \\ T_1 &: \; y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 - \ln(2) \end{aligned}$$



(2) **Étude d'une suite et d'une séries associées à** f. On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_{n+1} & = & f(u_n), & \qquad n \geq 0. \end{array} \right.$$

(a) On remarque que $f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leq 0$, car pour tout x réel, $1 + x^2 \geq 1$. Il suit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante. (On pouvait aussi faire une récurrence en utilisant la croissance de f). De plus, comme $f(0) = 0$ et que f est croissante, une récurrence immédiate permet de voir que (u_n) est minorée par 0. C'est vrai pour u_0 et

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 0.$$

Par convergence monotone, la suite converge vers une limite ℓ qui vérifie

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell = -\ell + \ln(1+\ell^2)\\ &\iff \ln(1+\ell^2) = 0\\ &\iff 1+\ell^2 = 1\\ &\iff \ell = 0.\end{aligned}$$

(b) On étudie la fonction différence:

$$g(x) = f(x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x^2).$$

Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[0;1]$ et on a

$$g'(x) = \frac{x(x^2-1)}{1+x^2}.$$

On en déduit les variations de g et son maximum, qui est nul et implique donc l'inégalité demandée:

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
g	$0 \searrow g(1)$

(c) Avant d'appliquer l'inégalité précédente à u_n, il faut s'assurer que tous les termes de la suite sont bien dans $[0;1]$. Mais c'est bien sûr le cas: on a déjà la minoration par 0, et la décroissance de la suite avec un premier terme $u_0 = 1$ assure la majoration par 1. Ainsi,

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - \frac{1}{2}u_n^2 \iff u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1}).$$

(d) On calcule la $n-$ième somme partielle

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k^2\\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 2\left(u_k - u_{k+1}\right)\\ &= 2\left(1 - u_{n+1}\right) \qquad \text{(somme télescopique)}\\ &\longrightarrow 2,\ n \to +\infty.\end{aligned}$$

Par comparaison, la série $\sum u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \leq 2.$$