ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°17

À rendre le 28 Avril

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x+2y-3z)$. On note $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ celle de $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer la matrice A de ϕ dans les bases canoniques.

(2) On introduit les familles de vecteurs $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathcal{G} = \{g_1, g_2\}$ définies par

$$f_1 = e_2 - e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$$

et

$$g_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad g_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Expliciter la matrice B de ϕ de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{G}$.

(3) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que P et Q sont inversibles et préciser P^{-1} et Q^{-1}.

(b) Que vaut la matrice $Q^{-1}AP$?

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif?

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'endomorphisme est surjectif?

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $f^n = 0$, pour $n \geq 2$.

Exercice 3. Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications linéaires.

(1) On suppose qu'aucune des deux applications n'est identiquement nulle, c'est à dire que $\mathrm{Ker}(\phi) \subsetneq \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(\phi) \subsetneq \mathbb{R}^n$. Montrer qu'on peut alors trouver $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\phi(u) \neq 0, \quad \psi(v) \neq 0, \quad \text{et} \quad \psi(u) = \phi(v) = 0.$$

(2) Calculer $\phi(u+v)\psi(u+v)$.

(3) Montrer alors que

$$\phi\psi = 0 \Longleftrightarrow \psi = 0 \text{ ou } \phi = 0.$$