Devoir Maison n°17

Solution

Exercice 1. Soit $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x+2y-3z)$.

(1) On trouve facilement, d'après l'expression algébrique de $f(x,y,z)$, l'écriture de la matrice A de *phi* dans les bases canoniques:

$$A = \mathrm{Mat}(\phi, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Comme la famille $\mathcal{F}$ est composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit, pour avoir une base, que la famille soit libre. Plus précisément, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Mais alors,

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 &\iff \lambda_1(e_2 - e_3) + \lambda_2(e_3 - e_1) + \lambda_3(e_1 + e_2) = 0 \\ &\iff (\lambda_3 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)e_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_3 = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 - \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 &=& 0 \end{array} \right. \qquad (\text{car } \mathcal{B}_3 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3) \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Un raisonnement analogue, dans $\mathbb{R}^2$, permet de justifier que $\mathcal{G}$ en est une base.

(b) La matrice de ϕ de la base $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{G}$ est donnée par l'expression des images par ϕ des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{G}$. Une fois calculées les images par ϕ des f_i (qu'on exprime au départ dans $\mathcal{B}_2$), il faut, en résolvant des petits systèmes 2×2 faciles, trouver les coordonnées de ces trois vecteurs dans $\mathcal{G}$. On trouve

$$\begin{aligned} \phi(f_1) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3g_1 - 7g_2 \\ \phi(f_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = -7g_1 + 5g_2 \\ \phi(f_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 6g_1 - 4g_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice cherchée est

$$B = \mathrm{Mat}(\phi, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 6 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Un pivot de Gauss permet de voir que les deux matrices sont inversibles. On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) On fait le calcul

$$\begin{aligned} Q^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

Ceci n'est pas étonnant. Soit u un vecteur. Si ses composantes sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$, en le multipliant à gauche par P, le vecteur obtenu a pour composantes les coordonnées de v dans la base canonique. Le multiplier par A revient à lui appliquer ϕ. Le résultat est un vecteur dont les composantes sont ses coordonnées dans la base canonique. Multiplier par Q^{-1} permet de revenir à l'expression dans la base $\mathcal{G}$, ce qui correspond bien à multiplier le vecteur de départ par B. Les matrice P et Q s'appellent des *matrices de passage*.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) On a les équivalences

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - z = 0 \iff v = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et les deux vecteurs générant le noyaux n'étant pas colinéaires, ils en forment une base. Le noyau n'étant pas réduit au vecteur nul, l'application n'est pas injective.

(2) Pour déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$, on regarde l'espace engendré par les images des vecteurs de la base canonique. On voit immédiatement que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

L'image étant de dimension 1 et en particulier non égale à $\mathbb{R}^3$, l'application n'est pas surjective (ce qu'on aurait pu savoir dès la question précédente).

(3) On voit facilement que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (comme le vecteur qui engendre l'image appartient au noyau et que ce dernier est un sous-espace vectoriel, il va nécessairement contenir toute l'image). Mais alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f^2(u) = f(f(u)) = 0$ car $f(u)$ est dans l'image de f et donc dans le noyau. Si f^2 est identiquement nulle, il suit, par une récurrence immédiate, que $f^n = 0$ pour $n \geq 2$: $f^{n+1} = f \circ f^n = 0$.

Exercice 3. Soient $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications linéaires.

(1) Les deux applications sont identiquement nulles. Ainsi, il existe nécessairement, pour chacune d'elle, (au moins) un élément qui n'est pas envoyé sur 0 (sinon elles seraient nulles). Soient alors $u, v \in \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(u) \neq 0$ et $\psi(v) \neq 0$. Mais en revanche, le produit $\phi\psi$ (qui définit une application non linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) est identiquement nulle donc $0 = (\phi\psi)(u) = \phi(u)\psi(u)$. Comme $\phi(u) \neq 0$, nécessairement, $\psi(u) = 0$. De la même façon, $\phi(v) = 0$.

(2) Par linéarité de ϕ et ψ, on a
$$\phi(u+v)\psi(u+v) = (\phi(u) + \phi(v))\,(\psi(u) + \psi(v)) = \phi(u)\psi(v).$$

(3) Le sens $\Leftarrow$ est immédiat (si l'une des deux applications est identiquement nulle, le produit le sera aussi). Pour l'autre sens, on procède par l'absurde et on utilise les deux questions précédentes. Si on a deux applications toutes deux non identiquement nulles mais dont le produit est nul, alors on peut trouver des vecteurs u, v avec les propriétés précédentes. Mais, on constate que $\phi\psi$ évalué en $u + v$ n'est pas nul (car $\phi(u) \neq 0$ et $\psi(v) \neq 0$), ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi, si le produit de deux telles applications est nulle, alors nécessairement, l'une de ces deux applications est nulle.

On insiste que ceci n'est plus du tout vrai si les applications ne sont pas à image dans $\mathbb{R}$ (auquel cas le produit correspond à la composition) mais on peut avoir deux applications linéaires non nulles dont la composée est identiquement nulle. C'est d'ailleurs le cas dans l'exercice précédent $f \circ f = 0$ mais $f \neq 0$.