Devoir Maison n°18

À rendre le 11 Mai

Exercice 1. (Étude d'une suite de variables aléatoires).

On considère un paramètre entier $m \geq 2$ et une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ (où $p \in [0;1]$).

(1) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de Y, puis à l'aide de la formule de Huygens-Kœnig, montrer que
$$E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

(2) On considère maintenant une première suite de variables aléatoires (U_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, U_n suit une loi uniforme sur $\left\{0; \frac{1}{n}; ...; \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que, pour tout $l \in [\![0; n-1]\!]$,
$$P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n},$$
et une seconde suite de variables aléatoires (X_n) définie conditionnellement:
$$\text{Sachant que } \left(U_n = \frac{k}{n}\right), \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right).$$

(a) Donner la loi de X_1.

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que, pour tout $i \in [\![0; m]\!]$,
$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(3) Utiliser la première question pour donner, sans calcul supplémentaire, la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

(4) En déduire alors que
$$E(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}.$$

(5) En utilisant à nouveau la première question, donner sans calcul la valeur de la somme
$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$
(On citera le théorème utilisé en justification.)

(6) En déduire que
$$E(X_n(X_n-1)) = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$
puis que
$$V(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}.$$

Exercice 2. (Fraude dans les transports)

Dans une ville, le ticket de tramway est à un euro et l'amende, en cas d'absence de ticket, s'élève à 40 euros. Lors d'un trajet, la probabilité de contrôle est de p (où $p \in [0;1]$). Un voyageur indélicat voyage sans jamais acheter le moindre ticket. Quelle doit être la valeur de p (en fonction du nombre de trajet n que réalise ce voyageur) pour le dissuader de poursuivre ce comportement ?

Exercice 3. (Le Duc de Toscane)

On lance trois dés à six faces (supposés équilibrés) n fois consécutives. On introduit la variable aléatoire X comptant le nombre de lancers pour lesquels la somme des trois faces obtenues vaut 10 et Y la variable comptant lorsque cette somme vaut 9.

(1) Écrire deux fonctions sous `SciLab`, que l'on nommera `Toscane10(n)` et `Toscane9(n)`, simulant respectivement les v.a X et Y.

(2) Donner une valeur approximative des moyennes empiriques pour 1000 jets et $n = 100$. Qu'observe-t-on?

(3) Justifier le résultat observé en déterminant les lois puis les espérances de X et Y.