Devoir Maison n°18

Solution

Exercice 1. (Étude d'une suite de variables aléatoires).

(1) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors $E(Y) = mp$ et $V(Y) = mp(1-p)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= E(Y^2 - Y) \\ &= E(Y^2) - E(Y) \\ &= E(Y^2) - E(Y)^2 + E(Y)^2 - E(Y) \\ &= V(Y) + E(Y)^2 - E(Y) \\ &= mp(1-p) + m^2p^2 - mp \\ &= m(m-1)p^2, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue.

(2) (a) Par définition

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 0 | U_1 = 0) P(U_1 = 0) = 1,$$

et X_1 vaut presque sûrement 0.

(b) D'après la formule des probabilités totales, la famille $\{(U_n = k/n)\}_{0 \le k \le n-1}$ formant un s.c.e,

$$\begin{aligned} P(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} P\left(X_n = i | U_n = \frac{k}{n}\right) P\left(U_n = \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(3) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, alors, par définition de l'espérance et grâce au rappel de la Question (1)

$$\sum_{i=0}^{m} i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = E(Y) = \frac{mk}{n}.$$

(4) On en déduit que

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=0}^{m} iP(X_n = i)\\
&= \sum_{i=0}^{m} i\left(\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mk}{n}\\
&= \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\\
&= \frac{m}{n^2}\times\frac{(n-1)n}{2}\\
&= \frac{m(n-1)}{2n},
\end{aligned}$$

ce qui était demandé.

(5) Par le théorème de transfert (et la Question (1)), si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, alors

$$\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = E(Y(Y-1)) = m(m-1)\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

(6) Il suit que, toujours par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E(X_n(X_n-1)) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)P(X_n = i)\\
&= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\left(\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m(m-1)k^2}{n^2}\\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2},
\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n(X_n-1)) - E(X_n)^2 + E(X_n) \\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 + \frac{m(n-1)}{2n} \\
&= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1) - 3m^2(n-1)^2 + 6mn(n-1)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)\left(2(2n-1)(m-1) - 3m + 6n\right)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)(mn+m+2n+2)}{12n^2} \\
&= \frac{m(n-1)(n+1)(m+2)}{12n^2} \\
&= \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2},
\end{aligned}$$

ce qui termine l'exercice.

Exercice 2. (Fraude dans les transports)

On introduit une variable aléatoire X qui compte le nombre de contrôles lors de n trajets. Cette variable aléatoire suit clairement une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Son espérance vaut donc $E(X) = np$. Introduisons alors une autre variable aléatoire Y correspondant au gain engendré par cette pratique frauduleuse. À chaque trajet, on économise 1 euro mais à chaque contrôle, on en perd 40. Ainsi, $Y = n - 40X$ et on peut facilement calculer $E(Y)$ par linéarité de l'espérance

$$E(Y) = n - 40E(X) = n - 40np = n(1-40p).$$

Pour dissuader tout voyageur d'avoir ce type de comportement, il faut que le gain moyen correspondant à cette fraude soit négatif, ainsi il faut que $1 - 40p < 0$ ou encore que la probabilité de contrôle à chaque trajet p soit suffisamment élevée

$$p > \frac{1}{40}.$$

Si toutefois, on ne peut augmenter la probabilité de contrôle et que celle-ci est fixée, c'est l'amende c qu'il faut augmenter

$$c > \frac{1}{p}.$$

Exercice 3. (Le Duc de Toscane)

(1) Il est facile de simuler chacune des deux variables aléatoires X et Y. Voici une proposition de programme

```
function y=toscane10(n)
    y=0; //on initialise à 0 succès
    for i=1:n
        r=floor(6*rand())+1;
        s=floor(6*rand())+1;
        t=floor(6*rand())+1; // on simule trois dés
        if r+s+t ==10 then
            y=y+1; //si le total fait 10, on a un succès de plus
        end
    end
endfunction

function y=toscane9(n)
    y=0;
    for i=1:n
        r=floor(6*rand())+1;
        s=floor(6*rand())+1;
        t=floor(6*rand())+1;
        if r+s+t ==9 then
            y=y+1;
        end
    end
endfunction
```

(2) On utilise la fonction `mean()` pour déterminer les moyennes empiriques après 1000 simulations de 100 lancers des trois dés. Les instructions sont

```
-->for i=1:1000 x(i)=toscane10(100); y(i)=toscane9(100); end

-->mean(x), mean(y)
 ans  =

    12.614
 ans  =

    11.587
```

On obtient $\overline{x} = 12.614$ et $\overline{y} = 11.587$, ainsi la fréquence des lancers dont la somme fait 10 semble être plus importante.

(3) On a vu dans le Devoir Maison n°8 (Exercice 4) que la probabilité, lors du lancer de 3 dés, d'obtenir 10 était $p_1 = 27/6^3 = 0.125$ et celle d'obtenir 9 était $p_2 = 25/6^3 \simeq 0.116$. Comme on répéte l'expérience n fois et qu'on compte le nombre de succès, on a

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_1), \qquad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_2), \qquad \text{et donc} \qquad E(X) = np_1 = \frac{n}{8}, \qquad E(Y) = np_2 = \frac{25n}{6^3}.$$

Pour $n = 100$, on a donc des espérances

$$E(X) = 12,5 \qquad \text{et} \qquad E(Y) \simeq 11,6.$$