Devoir Maison n°19 - Entraînement en temps limité

Durée: 4 heures

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1).$$

On note $\text{Ker}(f)$ le noyau de f et $\text{Im}(f)$ son image.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

(1) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
(2) Justifier que f n'est pas bijectif.
(3) Prouver qu'il existe deux réels λ et μ (qu'on précisera), tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$.
(4) Donner une base des deux sous-espaces suivants

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 : \ f(X) = \lambda X\}, \quad \text{et} \quad E_\mu = \{X \in \mathbb{R}^3 : \ f(X) = \mu X\}.$$

(5) Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation

$$f(t) = t + v.$$

(6) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = \{u, v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions (1) ,(2) et (3) de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f.$$

(1) Montrer que :

$$f \circ g = g \circ f.$$

En déduire que

$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v).$$

(2) Justifier, à l'aide de la Question (4) de la partie précédente, qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.

(3) On note N la matrice de g dans la base $C = \{u, v, w\}$ définie dans la partie précédente. Justifier que

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

où a et b sont les deux réels définis à la question précédente et c, d, e des réels.

(4) Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$? (On pourra raisonner en utilisant les matrices de f et g dans la base C.)

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) Calculer I_1.

(2) (a) Montrer que, pour tout $x \in [1; e]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n.$$

(b) En déduire le sens de variations de la suite (I_n).

(c) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

(d) Montrer que, pour tout $x \in [1; e]$,

$$0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}.$$

(e) En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} I_n.$$

(3) (a) Montrer (à l'aide d'une intégration par parties) que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

(b) En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} n I_n.$$

Exercice 3. Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Un joueur lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. (On peut appeler X_N le "nombre de changements" au cours des N premiers lancers).

Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement *Pile* , *Pile* , *Face* , *Pile* , *Face* , *Face* , *Face* , *Pile* , *Pile*, alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

(1) Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, \cdots, N-1]\!]$.

(2) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.

(3) Montrer que

$$P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

et que

$$P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

(4) (a) Justifier que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P_{X_N=k}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}.$$

(b) En déduire que pour tout entier k de $[\![0, ..., N-1]\!]$

$$P(X_{N+1}-X_N=0 \cap X_N=k)=\frac{1}{2}P(X_N=k).$$

(c) En sommant cette relation de $k=0$ à $N-1$, montrer que

$$P(X_{N+1}-X_N=0)=\frac{1}{2}.$$

(d) Montrer que la variable $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

(e) En déduire la relation $E(X_{N+1})=\frac{1}{2}+E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.

Exercice 4. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

Écrire une fonction sous `SciLab`, prenant en argument l'entier n, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z.