Devoir Maison n°19 - Entraînement en temps limité

Solution

Exercice 1. (D'après **ECRICOME 2014**) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1).$$

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

(1) On a

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\iff \quad AX = 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} x &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x - 2y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x &= 0 \\ z &= -2y \end{cases} \\ &\iff \quad X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(u).$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(2) D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injectif et *a fortiori* par bijectif non plus.

(3) On voit que $f(u) = 0$ et $f(v) = v$. Ainsi, il suffit de prendre $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

(4) On en déduit facilement

$$E_\lambda = E_0 = \{X \in \mathbb{R}^3 : \; f(X) = 0\} = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$$

et

$$E_\mu = E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : \; f(X) = X\} = \mathrm{Vect}(v).$$

En effet,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff AX = X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ x+2y+z &=& y \\ 2x-2y-z &=& z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ z &=& -y \end{array} \right. \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(5) On trouve les vecteurs $t = (x, y, z)$ qui conviennent en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} f(t) = tv + t &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ x+2y+z &=& y+1 \\ 2x-2y-z &=& z-1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1/4 \\ z &=& 3/4-y \end{array} \right. \\ &\iff t = \begin{pmatrix} 1/4 \\ y \\ 3/4-y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6) La matrice voulue impose que $f(w) = v + w$. Ainsi, il suffit, d'après la question précédente, de prendre $w = (1/4; 3/4; 0)$. On vérifie alors que la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$ en vérifiant qu'elle est libre. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v + \gamma w = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} (1/4)\gamma &=& 0 \\ \lambda + \mu + (3/4)\gamma &=& 0 \\ -2\lambda - \mu = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \lambda = \mu = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions (1) ,(2) et (3) de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f.$$

(1) Par hypothèse, $f = g \circ g$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f \circ g &= g \circ g \circ g \\ &= g \circ f \end{aligned}$$

et les deux endomorphismes commutent. Il suit que, d'après la Question (2) de la Partie 1., comme $f(u) = 0$ et $f(v) = v$,

$$f(g(u)) = g(f(u)) = g(0) = 0$$

et

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(v).$$

(2) Il suit que $g(u) \in \mathrm{Ker}(f)$. Or u est une base du noyau, donc il existe nécessairement $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = au$. De même, $g(v) \in E_1$ et v est une base de E_1 donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(v) = bv$.

(3) On sait que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$. On ne sait pas ce que vaut $g(w)$ mais il se décompose dans la base $\{u, v, w\}$: il existe des coefficients $c, d, e \in \mathbb{R}$ (qu'on a pas besoin d'expliciter) tels que $g(w) = cu + dv + ew$. Ainsi, la matrice N, représentant g dans la base $\{u, v, w\}$ est bien de la forme demandée.

(4) D'après l'analyse du problème faite dans les questions précédentes, s'il existe g tel que $g \circ g = f$, alors, en se plaçant dans la base $\{u, v, w\}$, on doit avoir $N^2 = T$. Ceci donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 &=& 0 \\ c(a+e) &=& 0 \\ d^2 &=& 0 \\ d(a+e) &=& 0 \\ e^2 &=& 0 \end{array} \right.$$

On constate alors que la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie le système précédent. Ainsi, si g est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\{u, v, w\}$ est N, g vérifie bien $g \circ g = f$. L'équation a donc bien des solutions.

Exercice 2. (D'après **ESC 1997**) Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) Pour $n = 1$, il faut calculer

$$I_1 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

On procède par IPP. Chacune des fonctions intervenant dans le produit est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e x^2 \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \frac{2e^3 + 1}{9}. \end{aligned}$$

(2) (a) Entre 1 et e, $0 \leq \ln(x) \leq 1$, donc les puissances de $\ln(x)$ sont rangées dans l'ordre décroissant. On a donc bien $\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n$.

(b) Comme $x^2 \geq 0$, il suit de l'inégalité précédente et de la positivité de l'intégrale que,

$$I_{n+1} = \int_1^e x^2 \ln(x)^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx = I_n$$

et la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

(c) Comme de plus $0 \leq x^2 \ln(x)^n$ pour $x \in [1, e]$ alors $I_n \geq 0$. (I_n) est alors une suite décroissante et minorée par 0, donc convergente (et sa limite $\ell \geq 0$).

(d) La fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x/e$ est dérivable sur $[1, e]$ et, pour tout $x \in [1; e]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0$$

donc f est croissante. Donc, pour tout $x \in [1; e]$, $f(x) \leq f(e) = 0$ ce qui donne bien l'inégalité demandée.

(e) On déduit de la question précédente par encadrement et du fait que $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx &\leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n dx \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^n \int_1^e x^{n+2} dx \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^n \frac{e^{n+3} - 1}{n+3} \\ &= \frac{e^3 - e^{-n}}{n+3} \longrightarrow 0, \ n \to +\infty. \end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

(3) (a) On procède à nouveau par IPP.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x^2 \ln(x)^{n+1} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{(n+1)\ln(x)^n}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{n+1}{3}\right) \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{n+1}{3}\right) I_n. \end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned} nI_n &= \frac{3n}{n+1} \left(\frac{e^3}{3} - I_{n+1}\right) \\ &\longrightarrow e^3. \end{aligned}$$

Exercice 3. (D'après **ESC 2004**) On note P_i (resp. F_i) l'évènement correspondant au fait d'obtenir *Pile* (resp. *Face*) au $i-$ème lancer.

(1) Le premier changement peut avoir lieu au second lancer au plus tôt. Au maximum, on aura N-1 changements. Donc $X_N(\Omega) = \{0, \cdots, N-1\}$.

(2) D'après l'observation précédente, on a en particulier $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

- $(X_2 = 0)$ signifie que l'on a pas de changement: deux *Pile* ou deux *Face*. Ainsi, $(X_2 = 0) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$ qui sont incompatibles; et les deux lancers sont indépendants donc
$$\mathrm{P}(X_2 = 0) = \mathrm{P}(P_1)\,\mathrm{P}(P_2) + \mathrm{P}(F_1)\,\mathrm{P}(F_2) = \frac{1}{2}.$$
- $(X_2 = 1) = \overline{(X_2 = 0)}$ donc $\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

La loi de X_2 est donc donnée par

k	0	1	
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$k\mathrm{P}(X_2 = k)$	0	$\frac{1}{2}$	$E(X_2) = \frac{1}{2}$

On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec comme précédemment

- $(X_3 = 0) = P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3$ d'où $\mathrm{P}(X_3 = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- $(X_3 = 1)$ donne un seul changement qui peut survenir au second ou au troisième lancer; le premier donnant *Pile* ou *Face*. Donc
$$(X_3 = 1) = P_1P_2F_3 \cup P_1F_2F_3 \cup F_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3$$
et
$$\mathrm{P}(X_3 = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$
- $(X_3 = 2)$ si on change à chaque lancer. Donc
$$(X_3 = 2) = P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3$$
et
$$\mathrm{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Et la loi de X_3 est donnée par

k	0	1	2	total
$\mathrm{P}(X_3 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(3) L'évènement $(X_N = 0)$ signifie que l'on n'a aucun changement (tous les lancers donnent *Pile* ou bien tous donnent *Face*). Donc
$$\mathrm{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

D'autre part, $(X_N = 1)$ signifie que l'on n'a qu'un seul changement, qui peut survenir du second au $N-$ième lancer. Le premier lancer étant *Pile* ou *Face*,
$$(X_N = 1) = \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \bigcap_{i=k}^{N} P_i\right) \cup \bigcup_{k=2}^{N}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} P_i \bigcap_{i=k}^{N} F_i\right)$$

La réunion est disjointe et les lancers sont indépendants donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_N=1) &= \sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(F_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(P_i)\right)+\sum_{k=2}^{N}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathrm{P}(P_i)\prod_{i=k}^{N}\mathrm{P}(F_i)\right)\\
&= 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N.
\end{aligned}$$

(4) (a) Pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$, si $(X_N=k)$, on a alors eu k changements en N lancers.

Pour en avoir le même nombre en $N+1$ lancers, il faut avoir la même face du dé au $N+1^{ème}$ qu'au précédent, ce qui a une chance sur deux de se réaliser. Donc

$$\mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1}=k)=\frac{1}{2}.$$

(b) Et pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k) &= \mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1}-X_N=0)\,\mathrm{P}(X_N=k)\\
&= \mathrm{P}_{X_N=k}(X_{N+1}=k)\,\mathrm{P}(X_N=k)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_N=k).
\end{aligned}$$

(c) $(X_N=k)_{0\le k\le N_1}$ étant un système complet d'événements, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{N+1}-X_N=0) &= \sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{P}(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{P}(X_N=k)\\
&= \frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(d) $X_{N+1}-X_N$ prend les valeurs $\{0,1\}$ car en un lancer on a au plus un changement de plus.

$$\mathrm{P}(X_{N+1}-X_N=1)=1-\mathrm{P}(X_{N+1}-X_N=0)=\frac{1}{2}$$

donc $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On a donc

$$E(X_{N+1}-X_N)=\frac{1}{2}$$

d'où

$$E(X_{N+1})-E(X_N)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

et

$$E(X_{N+1})=\frac{1}{2}+E(X_N).$$

La suite $(E(X_n))_{n\ge 2}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $E(X_2)=\frac{1}{2}$ donc

$$E(X_N)=(N-2)\frac{1}{2}.$$

Exercice 4. (D'après **EDHEC 2004**) On propose la fonction `SciLab` suivante. On simule le lancer de la pièce par une loi uniforme sur $\{0;1\}$ en associant à *Pile* la valeur 1.

```
function y=EDHEC2004(n)
    y=0;
    i=1; // on initialise le rang du lancer
    while y=0 & i<n //tant qu'il n'y a pas de Pile et qu'on lance la pièce
        r=floor(2*rand());
        if r==1 then
            y=i;
        end
        i=i+1;
    end
endfunction
```