# Devoir Maison n°1

*Solution*

**Exercice 1.** (Simplifications)

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule, en factorisant par la plus haute puissance de 10 commune à tous les termes:
$$A = \frac{10^n\left(10 - 9 - 10^2\right)}{10^{n-1}\left(2 + 8 - 10^2\right)} = \frac{10 \times (-99)}{-90} = 11.$$

(2) On met au même dénominateur (ce qui revient ici à mutiplier par l'expression conjuguée)
$$B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + 3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{3 - 2} = \sqrt{18} + \sqrt{12} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{3}.$$

**Exercice 2.** (Valeur absolue - Racine)

(1) On commence par regarder le signe des expression à l'intérieur des valeurs absolues:
$$3x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3} \qquad\qquad 7 - 8x \geq 0 \iff x \leq \frac{7}{8}.$$
On peut donc découper la droite réelle en trois parties et recoller les morceaux:
$$C(x) = \begin{cases} 2(1-3x) - (7-8x), & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 2(3x-1) - (7-8x), & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{8} \\ 2(3x-1) - (8x-7), & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \end{cases}$$
ce qui donne
$$C(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 14x - 9, & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{8} \\ -2x + 5, & \text{si } \frac{7}{8} \leq x \end{cases}$$

(2) Pour résoudre
$$(E) \qquad\qquad \sqrt{36x^2 - 24x + 4} = |7 - 8x|,$$
on commence par simplifier l'expression à l'intérieur de la racine:
$$\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = \sqrt{4\left(9x^2 - 6x + 1\right)} = 2\sqrt{(3x-1)^2} = 2\left|3x - 1\right|.$$
L'équation $(E)$ initiale est donc équivalente à
$$(E) \iff 2\left|3x - 1\right| = |7 - 8x| \iff C(x) = 0.$$
On utilise alors l'expression de $C$ trouvée à la question précédente pour trouver que
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{9}{14};\ \frac{5}{2}\right\}.$$

**Exercice 3.** (Equation du second degré à paramètre) Avant de calculer le discriminant qui dépend de $m$ et de poursuivre avec l'étude du signe de ce discriminant. Il est important de faire quelques remarques.

(1) Si $m = 2$, alors il n'y a pas de terme de degré 2 et l'équation devient une simple équation du premier degré $6x - 12 = 0$ dont l'unique solution est $x = 2$.
(2) Si $m = 14$, (ce cas particulier n'est pas réellement nécessaire à traiter) il n'y a pas de terme constant, et on peut factoriser par $x$ pour obtenir une équation facile à résoudre et qui admet deux solutions:

$$x(12x + 30) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{30}{12} = -\frac{5}{2}.$$

Dans les autres cas, on calcule

$$\Delta(m) = [2(m+1)]^2 - 4(m-2)(m-14) = 4(m^2 + 2m + 1 - m^2 + 16m - 28) = 36(2m-3).$$

Le signe de $\Delta(m)$ est donc donné par celui de $2m - 3$. Il suit qu'on est donc dans un des cas suivants:

- Si $\Delta(m) < 0 \Leftrightarrow 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$, alors l'équation n'admet aucune solution:
$$\mathcal{S} = \emptyset;$$
- Si $\Delta(m) = 0 \Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, alors l'équation admet une unique solution $x_0 = \frac{-2(m+1)}{2(m-2)}$ ce qui donne $x_0 = 5$ avec $m = \frac{3}{2}$:
$$\mathcal{S} = \{5\};$$
- Si $\Delta(m) > 0 \Leftrightarrow 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$, alors l'équation admet deux solutions:
$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-m - 1 - 3\sqrt{2m-3}}{m-2};\ \frac{-m - 1 + 3\sqrt{2m-3}}{m-2} \right\}.$$
(On retrouve en particulier bien $x = 0$ et $x = -\frac{5}{2}$ si $m = 14$.)

**Exercice 4.** On applique la règle du cours concernant les négations des propositions quantifiées. On obtient donc:
(i) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x$;
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x$;
(iii) $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M$;
(iv) $\exists x \in \mathbb{R},\quad f(x) > 0$ **et** $x > 0$;
(v) $\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \eta$ **et** $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.
(La négation de l'assertion $(ii)$ est obtenue en remarquant que "La courbe représentative de $f$ coupe la droite d'équation $y = x$" est équivalent à l'existence d'un $x$ pour lequel $f(x) = x$.)

**Exercice 5.** Soient $f, g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans le cas $(i)$ les propositions sont équivalentes mais ce n'est pas le cas pour $(ii)$. Montrons cela.

(i) **P:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
**Q:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$.

Montrons que $P \iff Q$. Pour cela on suppose qu'on a $P$. Pour montrer que $Q$ est vraie, soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. D'après $P$, $f(x) = 0$. Ceci étant vrai pour toute valeur arbitraire de $x$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Le même raisonnement permet de voir que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$ donc on a bien $Q$.

Montrons ensuite $Q \iff P$. On suppose donc qu'on a $Q$, c'est à dire que les fonctions $f$ et $g$ sont toutes deux identiquement nulles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, on a donc $f(x) = g(x) = 0$. On a donc bien $P$ et l'équivalence est ainsi démontrée.

Cette équivalence se reformule comme suit: Deux fonctions sont simultanément nulles partout si et seulement si chacune des deux fonctions est identiquement nulle.

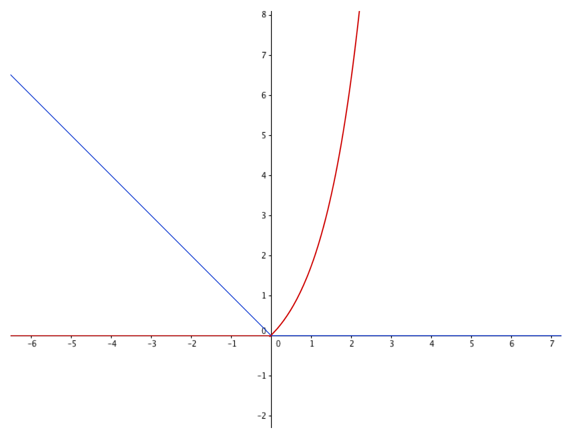
(ii) **P:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$.
**Q:** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$.
Dans ce cas-là, il n'y a plus équivalence, mais l'implication $Q \Longleftrightarrow P$ reste vraie. En effet, supposons qu'on a $Q$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. D'après $Q$, l'une des deux fonctions $f$ ou $g$ est identiquement nulle. Si c'es $f$, on aura $f(x) = 0$, si c'est $g$, on aura $g(x) = 0$. Dans les deux cas, on a bien $P$.

Cette implication se reformule comme suit: Si $f$ ou $g$ est identiquement nulle, alors, pour tout $x$, $f(x)$ ou $g(x)$ est nul. On voit bien que la réciproque est fausse. Le contre-exemple que l'on va donner permet également de répondre à la question (2) de l'exercice.

Il suffit de prendre deux fonctions qui s'annulent de manière "croisée" sans être identiquement nulles. Il y a une infinité de telles fonctions, mais prenons par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Les deux fonctions ne sont pas identiquement nulles mais leur produit vaut toujours 0.



**Exercice 6.** Soit $f$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$.

(1) On commence par réécrire $f$ à l'aide de l'exponentielle et du log:

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

et on constate que tout est en effet bien défini pour $x > 0$.

(2) Il faut donc déterminer la limite en $+\infty$ et celle en 0. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ et que } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

l'algèbre des limites nous permet de conclure que, utilisant $e^x \to +\infty,\ x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty \text{ et que } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

on a que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x) = -\infty$$

et comme $e^x \to 0,\ x \to -\infty$, il suit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

(3) On constate que $g$ est définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction $f$ étant continue sur $]0;+\infty[$ (comme composée de fonctions usuelles continues), la fonction $g$ est elle aussi continue sur le même intervalle. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = g(0)$$

et donc $g$ est également continue en 0. On dit que la fonction $g$ prolonge par continuité la fonction $f$ car c'est une "extension" de celle-ci (elles coïncident sur l'ensemble de définition de $f$) et cette prolongation à 0 est fait de manière continue car la valeur choisie en 0 est celle de la limite de $f$.

(4) Cette inégalité est classique. Il suffit de poser $\phi(x) = \ln(x) - x - 1$, de dériver $\phi$, de voir que son maximum est atteint en $x = 1$ et qu'il vaut $-2$ qui est négatif.

(5) La fonction $f$ est bien dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonction dérivable sur le même ensemble. Les règles de calcul donnent

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{-1}{x^2} \times \ln(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\right] \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\ &= \frac{x + 1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right). \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée est clairement donné par celui de $x + 1 - \ln(x)$ qui est toujours positif d'après la question précédente. Donc $f$ est strictement croissante sur son ensemble de définition:

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f$ | $\|\|$ $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

(6) Pour étudier la la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$, on commence par remarquer que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x} = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par les résultats de comparaison entre le log et les puissances de $x$, on sait que $\frac{\ln(x)}{x} \to 0,\ x \to +\infty$. Il suit donc, par composition des limites, que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

On calcule alors la limite de $f(x) - x$, en factorisant par $x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\frac{\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1}{\frac{\ln(x)}{x}} = +\infty$$

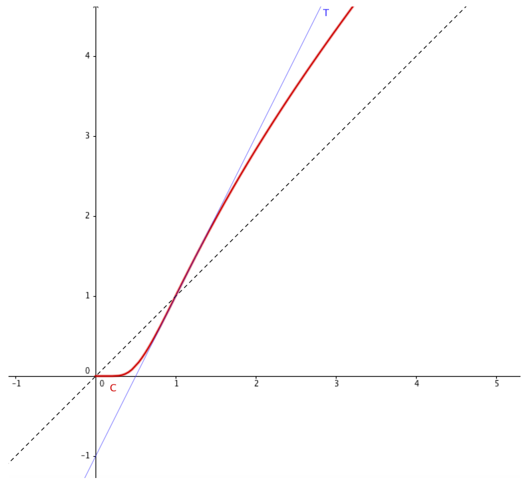
car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)-1}{\frac{\ln(x)}{x}} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1.$$

On conclut donc que la courbe de $f$ admet une branche parabolique de direction $y = x$ qu'elle "regarde" par au dessus.

(7) On trouve facilement, à partir de la formule du cours, que la tangente a pour équation $y = 2x - 1$.

(8) La construction donne




**Exercice 7.** (Ange ou Démon?) On note

**P:** José est un ange $\Longleftrightarrow$ José dit la vérité;
**Q:** Josette est un ange $\Longleftrightarrow$ Josette dit la vérité.

Étudions donc les possibilités dans chacun des cas:

(i) Josette dit "je suis un ange ou José en est un" $\Longleftrightarrow Q \vee P$.
Si Josette est effectivement un ange (et dit la vérité), on a que $Q \vee P$ est vraie et José peut alors être un ange ou un démon. Si Josette est un démon alors c'est la négation qui est vraie, c'est à dire $\neg(Q \vee P) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P$. Ainsi, la seule possibilité pour José est d'être un démon. Au final, les possibilités dans ce cas sont (Ange, Ange), (Démon, Ange) et (Démon, Démon).

(ii) José dit "nous sommes tous les deux des anges", ce à quoi Josette répond "José ment!".
Si José est un ange (si donc $P$ est vraie), alors nécessairement Josette ment (et est donc un démon) ce qui contredit alors la véracité de ce que dit José. José est donc nécessairement un démon (et il ment) donc Josette dit la vérité. On vérifie que c'est compatible avec la négation de la phrase de José: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.
Au final, la seule possibilité est donc (Démon, Ange).

(iii) José dit "si moi je suis un ange, alors Josette est un démon" $\Longleftrightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$.
Si José dit la vérité, alors l'implication est vraie et Josette est donc un démon. Si par contre José ment, c'est la négation de cette implication qui est vraie, à savoir $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ mais la véracité de cette négation n'est pas compatible avec le fait que José soit un démon. La seule possibilité est donc (Ange, Démon).

(iv) Josette dit "un de nous est un ange et l'autre est un démon" $\Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
Si la phrase de Josette est vraie, c'est un ange, et José est donc nécessairement un démon. Si elle ment, c'est la négation qui est vraie

$$\begin{aligned}
\neg\left((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\right) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q)\\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P).
\end{aligned}$$

Josette étant un démon, la seule façon que cette dernière assertion soit vraie est que José en soit un lui aussi.
Au final, les possibilités sont (Démon, Ange) et (Démon, Démon).