
Devoir Maison n°2

À rendre le 29 Septembre

Toutes les réponses doivent être *justifiées*.

Exercice 1.

(1) Montrer que

$$\forall x, y \geq 0, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

(2) En déduire que

$$\forall x, y, z \geq 0, \quad (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

(3) Montrer que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x+y)(y+z)(z+x) = (xy + yz + zx)(x+y+z) - xyz.$$

(4) Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall x, y, z > 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Exercice 2.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

(2) Étudier complètement la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (parité, limites, asymptotes, variations) et représenter l'allure de la courbe de f .

Exercice 3. (SciLab) Le niveau de pollution à l'ozone est calculé de la façon suivante: le niveau 1 est atteint à partir d'une concentration en ozone de 140 unités ($\mu\text{g}/\text{m}^3$), le niveau 2 à partir de 180 unités et le niveau 3 à partir de 220 unités.

Écrire un programme qui demande la concentration en ozone dans l'air et qui donne le niveau de pollution (l'utilisateur doit voir l'affichage "Le niveau de pollution est").

Exercice 4.

 (SciLab)

(1) Écrire les instructions pour définir la fonction $f(x) = e^x - 2$ dans la console.

(2) On considère alors le programme suivant:

```
e=input('Entrer la précision voulue :');
a=input('Entrer la borne inférieure de l intervalle de recherche :');
b=input('Entrer la borne supérieure de l intervalle de recherche :');

while abs(b-a)>e
    c=(a+b)/2;
    if f(b)*f(c)<=0 then
        a=c;
    else b=c;
    end
end
disp(c, 'près est ', e, 'Une valeur approchée de la solution à ')
```

- (i) Faire tourner **à la main** (c'est à dire remplir le tableau ci-dessous jusqu'à l'arrêt théorique du programme - on peut utiliser Scilab pour calculer les valeurs successives de $f(b)*f(c)$) le programme avec la fonction f susmentionnée et des valeurs initiales $a = -2$, $b = 2$ et $e = \frac{1}{4}$.

	Avant while	1er tour de boucle	2ème tour...
abs(b-a)						
c	×					
f(b)*f(c)	×					
a						
b						

- (ii) Même question avec $e = \frac{1}{8}$.
 (iii) Quelle est la question à laquelle répond ce programme?