Devoir Maison n°20

À rendre le 21 Juin

Exercice 1.

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire *Pile* avec la probabilité $1/3$. Un joueur B dispose d'une pièce qui, elle, a la propriété de faire *Pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$.

Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants.

Partie A - Un premier duel de pièces

Dans cette partie, on effectue le jeu suivant: les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne *Pile*.
Si A et B ont fait *Pile* simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent.
Sinon, le premier à obtenir *Pile* s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir *Pile* également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A et Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et $Z = Y - X$.

(1) Déterminer les lois de X et Y. Justifier que ces deux variables aléatoires admettent chacune une espérance et une variance qu'on précisera.

(2) (a) Montrer que
$$E(Z) = \frac{1-3p}{p}.$$
(b) Montrer que
$$P(Z=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) = \frac{p}{1+2p}.$$
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$P(Z=n) = \frac{p}{1+2p}(1-p)^n.$$
(d) En déduire $P(Z<0)$ puis interpréter les événements $(Z=0)$, $(Z>0)$, $(Z<0)$.
(e) Que se passe-t-il si $p = 1/3$? Commenter.

Partie B - Un autre jeu de pièces

On procède ensuite au nouveau jeu suivant: les joueurs A et B lancent leur pièce N fois de suite (avec $N \in \mathbb{N}^*$); le joueur B paye un euro à A à chaque fois que les pièces n'affichent pas le même résultat. On note H_N la variable aléatoire égale à la somme payée par le joueur B au joueur A.

(1) En utilisant la fonction `rand()`, écrire, sous `SciLab`, une fonction `lancer_simultane()` qui simule ce lancer et renvoie 0 si les résultats de A et B sont identiques et 1 s'ils sont différents.

(2) Calculer la probabilité que les lancers de A et de B soient différents.

(3) Montrer que H_N suit une loi classique que l'on détaillera.

Exercice 2. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée

$$I_n = \int_n^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'intégrale est bien convergente, et exprimer I_n en fonction de n (on pourra utiliser un changement de variable).

(2) Justifier, que, I_n est équivalent, en $+\infty$, à $1/n$, c'est à dire que

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot I_n = 1.$$

Exercice 3. (D'après **EML 2016**)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

(1) Montrer que f est paire.

(2) Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer la convergence, puis calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t.$$

(4) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t.$$