Devoir Maison n°20

Solution

Exercice 1. (D'après **ESC 2008**)

Partie A - Un premier duel de pièces

(1) X et Y désignent deux temps d'attente lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli avec probabilité $1/3$ pour X et p pour Y. Ainsi, il s'agit de deux lois géométriques:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3), \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

D'après le cours, ces deux v.a. admettent une espérance, et on a

$$E(X) = 3 \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{1}{p}.$$

(2) (a) Il est immédiat, d'après les propriétés de l'espérance, que Z admet une espérance et que

$$E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{1-3p}{p}.$$

(b) On peut décomposer

$$(Z = 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[(X = k) \cap (Y = k)\right].$$

La réunion étant clairement disjointe et les lancers étant tous indépendants les uns des autres, on a

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}(1-p)^{k-1}p \\ &= \frac{p}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{p}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2(1-p)}{3}}\right) \\ &= \frac{p}{1+2p}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De la même manière que précédemment,

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=n+k)P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}(1-p)^{n+k-1}p \\ &= \frac{p(1-p)^n}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{p(1-p)^n}{3} \times \frac{3}{1+2p} \\ &= \frac{p}{1+2p}(1-p)^n, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue.

(d) On passe par le complémentaire

$$\begin{aligned} P(Z<0) &= 1-\left(P(Z=0)+\sum_{n=1}^{+\infty} P(Z=n)\right) \\ &= 1-\left(\frac{p}{1+2p}+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1+2p}(1-p)^n\right) \\ &= 1-\frac{p}{1+2p} \times \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= 1-\frac{1}{1+2p} \\ &= \frac{2p}{1+2p}. \end{aligned}$$

$(Z=0)$ signifie qu'il y a égalité; $(Z>0)$ signifie que le joueur B perd de l'argent (car alors $Y>X$), alors que $(Z<0)$ signifie que c'est A qui perd de l'argent

(e) Si $p=1/3$ (c'est à dire avec des pièces qui donnent *Pile* avec la même probabilité), on a $P(Z<0)=P(Z>0)=2/5$. Les deux joueurs ont la même probabilité de perdre de l'argent, c'est tout à fait intuitif.

Partie B - Un autre jeu de pièces

(1) On propose le programme `SciLab` suivant:

```
function y=lancer_simultane()
    if rand()<=1/3 then
        a=1; //si A fait Pile, a reçoit 1
    else
        a=0; //sinon 0
    end
    if rand()<=p then
        b=1; //si B fait Pile, b reçoit 1
    else
        b=0; //sinon 0
    end
    if a==b then //si les résultats sont les mêmes
        y=1; //y reçoit 1
    else
        y=0; //sinon 0
    end
endfunction
```

(2) Pour que A et B soient différents, il faut (et il suffit) que A fasse *Pile* et B *Face*, ou le contraire. On a donc

$$P(A \neq B) = \frac{1}{3} \times (1-p) + \frac{2}{3} \times p = \frac{1+p}{3}.$$

(3) La somme à payer H_N est égale au nombre de résultats différents au cours de N lancers. Il est alors clair que H_N suit une loi binomiale

$$H_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1+p}{3}\right).$$

Exercice 2. (D'après **EDHEC 2003**). Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée

$$I_n = \int_n^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Pour montrer que l'intégrale est bien convergente, on va faire le changement de variable $u = 1/x^2$ (ce qui donne $\mathrm{d}x/x^2 = -\mathrm{d}u$)

$$\begin{aligned}
\int_n^A \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int_{1/n}^{1/A} e^u \mathrm{d}u \\
&= \int_{1/A}^{1/n} e^u \mathrm{d}u \\
&= [e^u]_{1/A}^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{A}\right) \\
&\longrightarrow \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1,\ A \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, I_n est bien convergente, et

$$I_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

(2) On utilise une limite usuelle. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{1/n} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Exercice 3. (D'après **EML 2016**)

On considère la fonction $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(1) On vérifie facilement, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(-t) &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \\
&= \frac{e^{2t}e^{-t}}{\left(e^t(e^{-t}+1)\right)^2} \\
&= \frac{e^{2t}}{e^{2t}} \times \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

et la fonction est bien paire.

(2) f est le quotient de deux fonction continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$, elle est donc strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Par parité de f, il suffit de montrer la convergence et de calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

ce qu'on fait sans difficulté. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^A} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2},\ A \to +\infty\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale est bien convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

☞ *On constate que f est une densité de probabilité.*

(4) On sait, par croissance comparée que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-t} = 0$$

et donc

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \cdot tf(t) = 0.$$

Par conséquent, il existe $M \geq 0$, tel que pour tout $t \geq M$, $tf(t) \geq 1/t^2$. Or, $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$ - donc en particulier sur $[0; M]$ et l'intégrale de $tf(t)$ est finie - et

$$\int_M \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

converge. Par comparaison, l'intégrale étudiée est elle aussi convergente.