ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1.

(1) Soient $x, y \geq 0$. L'inégalité que l'on souhaite montrer est clairement équivalente à l'inégalité suivante
$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0.$$
Mais alors, on reconnait le développement de l'identité remarquable $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ qui est bien une quantité toujours positve.

(2) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente trois fois consécutives et d'en écrire le produit:
$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz} \times 2\sqrt{zx} = 8\sqrt{xyyzzx} = 8xyz,$$
car x, y et z sont positifs.

(3) Pour cette égalité, il suffit de développer séparément chaque terme et de vérifier qu'on a bien égalité. Pour le terme de gauche, on a
$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x) &= (xy + xz + y^2 + yz)(z+x)\\ &= 2xyz + x^2y + xz^2 + y^2z + y^2x + xz^2 + yz^2.\end{aligned}$$
Quant au terme de droite, on trouve
$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)(x+y+z) - xyz &= x^2y + xy^2 + xyz + yxz + yz^2 + y^2z + zx^2 + xyz + xyz - xyz\\ &= 2xyz + x^2y + xz^2 + y^2z + y^2x + xz^2 + yz^2,\end{aligned}$$
et on a bien l'égalité cherchée.

(4) Soient $x, y, z > 0$. D'après l'égalité précédente, on a
$$(xy+yz+zx)(x+y+z) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz.$$
Utilisant l'inégalité obtenue au (2), on peut donc écrire que
$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)(x+y+z) &\geq 8xyz + xyz.\\ &\geq 9xyz.\end{aligned}$$
Les nombres x, y et z étant strictement positifs, cette dernière inégalité est alors équivalente à
$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$
En remarquant que
$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{xy}{xyz} + \frac{yz}{xyz} + \frac{zx}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$
on a bien l'inégalité désirée.

Exercice 2.

(1) Il existe plusieurs méthodes pour démontrer l'inégalité souhaitée. Commençons déjà par remarquer que, pour tout x réel, $1+x^2$ est strictement positif, ainsi la racine est déjà bien définie partout. Par ailleurs, il est aussi clair que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 < x^2+1.$$

Ainsi, la fonction racine étant croissante, on peut en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}.$$

Cette dernière inégalité implique en particulier que

$$x > -\sqrt{x^2+1}$$

ou encore

$$x + \sqrt{x^2+1} > 0,$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(2) La question précédente nous permet d'affirmer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Afin de rechercher une éventuelle parité, et de calculer $f(-x)$, commençons par remarquer (en multipliant par l'expression conjuguée) que, pour tout x réel,

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)} = \frac{x-\sqrt{x^2+x}}{-1} = -x+\sqrt{x^2+1}.$$

Il suit que, si x est un réel quelconque

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= -\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) = -f(x), \end{aligned}$$

et f est bien impaire. En particulier, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Concernant les limites, il suffit alors de déterminer celle en $+\infty$. Il n'y a d'ailleurs aucune forme indéterminée, l'algèbre des limites permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to=\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

et comme le logarithme tend vers $+\infty$ avec x, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction étant impaire, on en déduit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Concernant la dérivabilité, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+x}\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

En particulier, on constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Afin d'avoir davantage d'informations sur l'allure de la courbe de f, déterminons par exemple l'équation de la tangente en 0:

$$T_0 : \ y = f'(0)x + f(0) = x.$$

Il est intéressant de connaître la position de la courbe de f par rapport à cette tangente. Cette position est donnée par le signe de la différence

$$d(x) = f(x) - x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - x.$$

Une étude rapide de la fonction d (via le calcul immédiat de sa dérivée en fonction de celle de f) nous permet d'affirmer que $d(x) > 0 \iff x < 0$, ainsi la courbe de f est au-dessus de la tangente T_0 si $x < 0$ et au-dessous si $x > 0$.

On étudie aussi la branche infinie de f. Pour cela, on commence par chercher la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Afin de lever des indéterminations, on factorise. Comme on s'intéresse à la limite en $+\infty$, les valeurs de x considérées sont positives, ainsi $|x| = x$ et on a

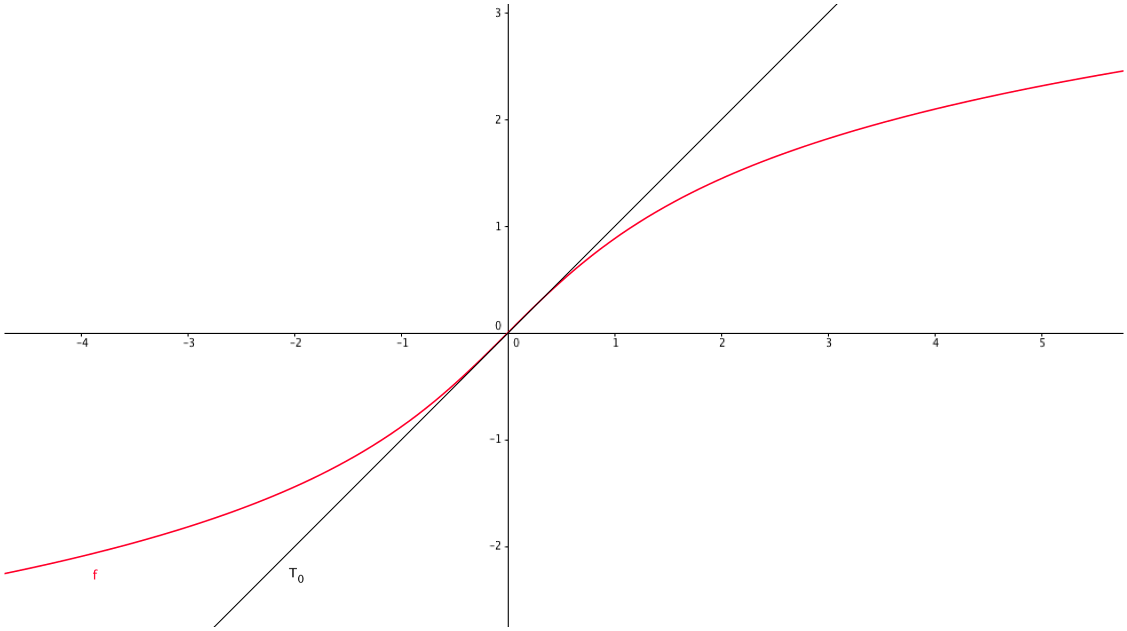
$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x} = \frac{\ln\left(x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} \\ &= \frac{\ln\left(x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}, \end{aligned}$$

ce qui permet, grâce aux limites de référence, de conclure que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

et ainsi la courbe de f admet, en $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe (Ox) qu'elle regarde par au-dessus. Par symétrie, elle admet, en $-\infty$, une branche parabolique de même direction qu'elle regarde par en dessous.

On trace alors l'allure de la courbe:



Exercice 3. (`SciLab`)

On propose le programme suivant, qui n'est pas la seule solution possible. Si toutefois on avait voulu tester l'appartenance du paramètre `c` rentré par l'utilisateur à un certain intervalle, il faut utiliser le connecteur logique **et** qui, en `SciLab` se code avec le symbole `&`. On **n'écrira donc pas** `if 140<=c<180 then` mais `if 140<=c & c<180 then`. Cela étant dit, la solution proposée est la suivante:

```
c=input("Entrer la concentration en ozone (micro grammes par m3) :");
if c<140 then
    disp("Aucun niveau de pollution atteint.")
else
    if c<180 then
        disp("Le niveau de pollution est: 1.")
    else
        if c<220 then
            disp("Le niveau de pollution est: 2.")
        else
            disp("Le niveau de pollution est: 3.")
        end
    end
end
```

Exercice 4. (`SciLab`)

(1) On programme une fonction dans l'éditeur `SciNotes`. Une fois celle-ci enregistrée (au format .sci) et exécutée, elle est "chargée" dans l'environnement et on peut donc l'appeler et y faire référence dans un programme. Pour celle qui nous concerne, il faut donc écrire

```
function y=f(x)
    y=exp(x)-2;
endfunction
```

(2) En faisant tourner le programme donné avec la fonction f susmentionnée et des valeurs initiales $a = -2$, $b = 2$ et $e = \frac{1}{4}$, on obtient les résultats suivants:

	Avant `while`	1er tour de boucle	2ème tour	3ème tour	4ème tour	Arrêt
`abs(b-a)`	4	4	2	1	0.5	0.25
`c`	$\times$	0	1	0.5	0.75	$\times$
`f(b)*f(c)`	$\times$	$-5.389..$	$3.870..$	$-0.728..$	$0.084..$	$\times$
`a`	-2	0	0	0.5	0.5	$\times$
`b`	2	2	1	1	0.75	$\times$

et le résutat affiché est: `Une valeur approchée de la solution à 0.25 près est 0.75.`

(3) Si maintenant $e = \frac{1}{8}$, le programme fait un tour de boucle de plus:

	Avant `while`	1er tour de boucle	2ème tour	3ème tour	4ème tour	5ème tour	Arrêt
`abs(b-a)`	4	4	2	1	0.5	0.25	0.125
`c`	$\times$	0	1	0.5	0.75	0.625	$\times$
`f(b)*f(c)`	$\times$	$-5.389..$	3.870..	$-0.728..$	0.084..	$-0.015..$	$\times$
`a`	-2	0	0	0.5	0.5	0.625	$\times$
`b`	2	2	1	1	0.75	0.75	$\times$

et le résutat affiché est: `Une valeur approchée de la solution à 0.125 près est 0.625.`

(4) Ce programme renvoie une valeur approchée (à la précision e choisie par l'utilisateur) de la solution (la plus proche de b) de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a; b]$ (où f est une fonction **continue**).

En effet, il procède par ce qu'on appelle *dichotomie*. L'idée est de diviser l'intervalle de recherche par deux (par rapport à son milieu) et de chercher du côté où se trouve la solution en répétant le processus jusqu'à ce que la taille de l'intervalle de recherche soit plus petit que la précision demandée. Auquel cas, on choisit comme solution c qui est une des bornes de l'intervalle.

Le choix du côté de la division que l'on choisit est effectué grâce au théorème des valeurs intermédiaires: si le produit des images par f des bornes de l'intervalle de recherche est négatif, c'est qu'elles sont de signes contraires et que donc la fonction s'annule entre les deux. Si par contre ce produit est positif, la solution de $f(x) = 0$ se trouve de l'autre côté de la division.