Devoir Maison n°3

À rendre le 13 Octobre

Exercice 1. Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$, par
$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n.$$

(1) Calculer S_2, S_3 et S_4, puis exprimer S_n à l'aide du symbole Σ.
(2) Montrer par récurrence que
$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$
(3) En développant $k(k-1)$ et en utilisant les propriétés du symbole Σ ainsi que des formules de sommes bien connues, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 2. (extraits de EDHEC 2001) On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) (a) Montrer que :
$$\forall k > 1, \qquad \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$
(b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad v_n \leq \ln(n) + 1.$$

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n:
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

(2) (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
(3) (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
(b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$
(c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_n^2 \geq 2n + 1.$$
(4) (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

(b) A l'aide de la question (1), établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

(5) (a) Ecrire un programme en `SciLab` qui, pour un entier $n \geq 2$ entré par l'utilisateur, calcule le rapport

$$\frac{u_n}{\sqrt{2n}}.$$

(b) Faire tourner le programme pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Qu'observe-t-on? Etait-ce prévisible d'après les questions précédentes?