Devoir Maison n°3

Solution

Exercice 1. On considère donc la suite (S_n) définie pour $n \geq 2$ par

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1) \times n.$$

(1) Pour $n = 2$, on a un seul terme : $S_2 = 1 \times 2 = 2$. Puis, $S_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$. Enfin, $S_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$. Plus généralement, on peut écrire S_n à l'aide du symbole Σ de différentes façons, selon ce que l'on choisit comme valeur initiale pour l'indice:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (k-1)k = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1).$$

(2) On veut montrer, par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

On commence alors par vérifier que cette formule est vraie au rang $n = 2$. On a déjà calculé $S_2 = 2$. Le membre de droite de la formule vaut, pour $n = 2$

$$\frac{(2-1) \times 2 \times (2+1)}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

et la formule est bien vérifiée au rang initial. Supposons donc maintenant qu'elle est vraie pour un certain $n \geq 2$ et montrons alors qu'elle est également vraie au rang d'après, c'est à dire montrons que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1-1)(n+1)(n+1+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Le terme S_{n+1} s'obtient à partir de S_n en rajoutant $n(n+1)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)k = \sum_{k=2}^{n} (k-1)k + n(n+1) \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) \\
&= n(n+1)\left(\frac{(n-1)}{3} + 1\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{n-1+3}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$. Par récurrence, on a bien l'égalité pour tout $n \geq 2$.

(3) On va retrouver cette formule par une démonstration *directe*. Plus précisément, on remarque que $(k-1)k = k^2 - k$. Il suit que

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)k = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k.$$

Or, on sait calculer la somme des entiers consécutifs et celle de leurs carrés. Le calcul donne

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=2}^{n+1} k \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\ &= n(n+1)\left(\frac{2n+1-3}{6}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \end{aligned}$$

ce qui coïncide bien avec la formule précédemment démontrée.

Exercice 2. (extraits de EDHEC 2001)

(1) (a) On montre en fait cette inégalité pour tout $x > 1$ réel. En effet, posons

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1).$$

La fonction g est bien définie, continue et dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2(x-1)} > 0, \qquad x > 1.$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. On détermine les limites aux bord de l'ensemble de définition:
En 1 : il n'y a pas de forme indéterminée, $\ln(x-1) \to -\infty$ donc $g(x) \to -\infty$.
En $+\infty$: la différence de log fait apparaître une forme indéterminée. On utilise les propriétés du log pour voir que

$$-\ln(x) + \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Or, comme $1 - \frac{1}{x} \to 1^-$, on en déduit que $g(x) \to 0^-$. Le tableau de variations est donc le suivant:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ 0^-

En particulier, $g(x) < 0$, pour tout $x > 1$. En applicant cette inégalité pour $x = k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on obtient l'inégalité recherchée.

(b) On veut donc utiliser l'inégalité précédente pour montrer que

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

On va majorer chaque terme de la somme par $\ln(k)-\ln(k-1)$. Cependant, l'inégalité n'étant vraie qu'à partir de $k=2$, on ne peut pas l'utiliser pour $k=1$ qu'on va donc laisser tel quel. On reconnaîtra ensuite une somme *télescopique.*

$$\begin{aligned} v_n &= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ &\leq 1+\sum_{k=2}^{n}(\ln(k)-\ln(k-1)) \\ &\leq 1+\ln(n)-\ln(2-1) \\ &\leq 1+\ln(n), \end{aligned}$$

qui est l'inégalité demandée.

On s'intéresse maintenant à la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}.$$

(2) (a) Afin que la suite soit bien définie, il faut s'assurer que u_n ne s'annule jamais; sinon il se serait pas possible de calculer son successeur. En fait, on montre que, pour tout $n\geq 0$, u_n existe et est strictement positif. Il est immédiat de vérifier que c'est le cas pour $n=0$. Supposons alors que pour un certain $n\geq 0$, u_n soit bien défini et strictement positif. Mais alors, il est possible de calculer quantité $u_n+\frac{1}{u_n}$ qui est encore strictement positive. On en conclut donc que u_{n+1} est à sont tour bien défini et strictement positif. La récurrence est ainsi facilement vérifiée.

(b) Il est très facile de voir, d'après la définition de (u_n) et la question précédente, que, pour tout $n\geq 0$,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}>0,$$

et la suite (u_n) est donc strictement croissante.

(3) (a) Il suffit de faire le calcul, en utilisant naturellement une identité remarquable. Soit $k\geq 0$,

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2-u_k^2 &= (u_{k+1}-u_k)(u_{k+1}+u_k) \\ &= \frac{1}{u_k}\left(u_k+\frac{1}{u_k}+u_k\right) \\ &= \frac{1}{u_k}\left(2u_k+\frac{1}{u_k}\right) \\ &= 2+\frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n\geq 1$. On reconnaît une fois de plus une somme télescopique:

$$\begin{aligned} u_n^2-u_0^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2-u_k^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(2+\frac{1}{u_k^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}2+\sum_{k=0}^{n-1} frac1u_k^2 \\ &= 2n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}. \end{aligned}$$

Comme $u_0 = 1$, on obtient

$$u_n^2 = 1 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

et on retrouve l'expression recherchée.

(c) Tous les termes dans la somme du membre de droite de l'égalité précédente sont strictement positifs. Il suit donc qu'on a bien

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n^2 \geq 2n + 1.$$

(4) (a) Soit $n \geq 2$. D'après l'inégalité précédente, on peut minorer tous les u_k^2, pour $1 \leq k \leq n-1$, par $2k+1$. En passant à l'inverse, on a donc

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots n-1\}, \qquad \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k}.$$

En injectant cela dans l'égalité obtenue en (3b), on a

$$\begin{aligned} u_n^2 &= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = 2n + 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &= 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &\leq 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \\ &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}, \end{aligned}$$

ce qu'on est bien content d'obtenir.

(b) On utilise alors l'inégalité qu'on avait prouvée à la question (1b), à savoir que $v_n \leq \ln(n) + 1$, combinée avec la question précédente pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1} \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + 1) \\ &\leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln(n-1). \end{aligned}$$

(5) (a) On utilise nos compétences en `SciLab`, acquises grâce à un travail sérieux, pour écrire la fonction suivante (au vu de la question qui suit, il semble plus pratique d'écrire une fonction qu'un programme qui affiche le résultat mais toute réponse sous forme de programme est naturellement acceptée si bien sûr les instructions sont correctes).

```
function y=exo2dm3(n)
u=1; // initialisation de la suite u_n
for i=1:n
    u=u+1/u; // relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1}
end
y=u/sqrt(2*n);
endfunction
```

(b) On va demander à `SciLab` de calculer $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$ par exemple pour $n = 10^k$, avec k variant de 1 à 7. Voici ce que ce dernier nous donne, après un léger temps d'attente pour les deux derniers termes:

```
-->for i=1:7, disp(exo2dm3(10^i)); end

    1.0707877

    1.0100359

    1.0012937

    1.0001582

    1.0000187

    1.0000022

    1.0000002
```

Les termes semblent donc se rapprocher de la valeur 1. En anticipant un peu sur le chapitre suivant, on peut donc conjecturer, grâce à `SciLab`, que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

Ce résultat, qui est vrai, n'est pas du tout surprenant au vu de l'étude qu'on a réalisé précédemment. En effet, on a obtenu l'encadrement suivant:

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

ce qui donne (pour $n > 1$),

$$1 + \frac{1}{2n} \leq \frac{u_n^2}{2n} \leq 1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}.$$

Les termes qui encadrent $\frac{u_n^2}{2n}$ tendent tous les deux vers 1. Le *théorème des gendarmes* (que l'on verra bientôt) assure alors qu'il en est de même pour $\frac{u_n^2}{2n}$. Par composition des limites, on a donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{1} = 1.$$

Toutes ces notions et ces outils seront bien évidemment développés dans le chapitre correspondant. Néanmoins, il est toujours intéressant d'être observateur et de rester curieux.