Devoir Maison n°4

À rendre le 3 Novembre

Exercice 1. (Sommes de peu de fois)

(1) Après avoir permuté l'ordre de sommation (avec vigilance), calculer

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}.$$

(2) Après avoir précisé la valeur de $\min(i,j)$, calculer

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\min(i,j).$$

Exercice 2. (Remboursement d'un emprunt par annuités constantes)

L'objectif de ce problème est de voir une application concrète de la notion de suite et de constater que `SciLab` est un outil réellement utile.

Trois suites croisées

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ trois suites numériques vérifiant les relations suivantes:

(R1) $$\exists a\in\mathbb{R},\ \forall n\geq 1,\qquad a_n+b_n=a$$

(R2) $$\forall n\geq 1,\qquad d_n=d_{n-1}-a_n$$

(R3) $$\exists \tau>0,\ \forall n\geq 1,\qquad b_n=\tau d_{n-1}$$

(1) Montrer que, pour tout $n\geq 1$, on a

$$a_{n+1}=a_n+\tau\left(d_{n-1}-d_n\right).$$

(2) En déduire une relation entre a_{n+1} et a_n puis, en justifiant, l'expression du terme général de (a_n) en fonction de a_1 et de n.

(3) On note

$$S=\sum_{i=1}^{N}a_i.$$

À l'aide de la question précédente, exprimer S en fonction de a_1, de τ et de N. En déduire a_1 en fonction de S, de τ et de N.

(4) En déduire l'expression de a en fonction de S, de τ, de d_0 et de N.

Un plan de remboursement

Un bel et sombre inconnu veut emprunter à sa banque une certaine somme d'argent S, qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant N années, une certaine somme fixe a, appelée annuité.

La banque applique au capital S emprunté un taux d'intérêt annuel de $t\%$. On voit alors que l'annuité a remboursée l'année n est constituée à la fois de l'intérêt b_n (produit par le capital restant dû) et par l'amortissement a_n correspondant à la part de capital remboursée cette année là.

Après versement de l'annuité de la n-ième année, la dette actualisée d_n est diminuée du montant de l'amortissement.

(1) Avec les notations précédentes, que vaut d_0?
(2) Expliquer pourquoi les suites (a_n), (b_n) et (d_n) ainsi définies vérifient les conditions $(R1)$, $(R2)$ et $(R3)$. Préciser la valeur du paramètre τ de la relation $(R3)$ dans ce cas précis.
(3) Que doit alors payer chaque année le bel et sombre inconnu pour rembourser en 20 ans son emprunt de 150 000 euros à un taux de 1,95 %? (on arrondira le résultat au centime d'euro).
(4) Écrire un programme, sous `SciLab`, qui, à partir du taux d'intérêt, de la somme empruntée et du nombre d'années affiche la valeur de l'annuité correspondante.
(5) Modifier le programme pour qu'il affiche également le total de tous les intérêts perçus par la banque.

Une approximation du taux

Dans une autre banque, on propose au bel et sombre inconnu un prêt de la même somme, sur une durée de 15 ans, avec annuités constantes de 11 683 euros.

Lorsque le bel et sombre inconnu demande au banquier quel est le taux d'intérêts correspondant à cette offre, ce dernier, évasif mais péremptoire, lui affirme qu'il est nettement inférieur à 2%.

L'objectif de cette section est de déterminer si le banquier ment ou non.

(1) Utiliser la formule obtenue à la question 4 de la première partie pour montrer que le taux d'intérêt τ est solution de l'équation
$$\frac{150000}{11683}\tau\left(1+\tau\right)^{15}-\left(1+\tau\right)^{15}+1=0.$$

On introduit alors la fonction (définie sur $\mathbb{R}$)
$$P : x \mapsto \frac{150000}{11683}x\left(1+x\right)^{15}-\left(1+x\right)^{15}+1$$
et P' sa dérivée. Il s'agit alors de déterminer la solution de $P(x)=0$ la plus proche de $0,02$.

Cette équation est difficile à résoudre. En fait, on va utiliser une méthode d'approximation des racines de polynômes (dite de Newton) dont on va admettre le bien fondé et qu'on va appliquer avec fougue et insouciance.

On introduit la suite (t_n) définie par
$$\begin{cases} t_0 & = & 0.02 \\ t_{n+1} & = & t_n - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)} \end{cases}$$
On approximera par exemple τ par le premier terme de la suite dont l'écart avec le précédent est strictement inférieur à 10^{-9}.

(2) Exprimer $P'(x)$.
(3) À l'aide de `SciLab`, déterminer la valeur du taux correspondant à la seconde offre faite au bel et sombre inconnu. Le banquier disait-il la vérité?