Devoir Maison n°5

À rendre le 10 Novembre

Exercice 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de premiers termes u_0 et v_0 vérifiant les relations

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

(1) En recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de (u_n) et (v_n), déterminer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
(2) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 0$ par

$$u_n = \frac{\left\lfloor \left(n + \frac{1}{3}\right)^2 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(2n - \frac{1}{6}\right)^2 \right\rfloor}.$$

(1) En utilisant la définition de la partie entière, donner un encadrement de u_n.
(2) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

(1) Montrer que

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'.$$

(2) En déduire une autre expression pour $f(x)$.
(3) À l'aide de la question précédente, calculer $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$ puis en déduire la limite de (α_n).
(4) Calculer

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}.$$

(5) Que vaut la limite de (u_n)?

Exercice 4. Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère alors la suite (u_n) définie son premier terme u_0 et, pour $n \geq 0$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (a) Pour $x \geq 0$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 (b) En déduire le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.
(2) Déterminer le signe de $f(x) - x$ selon la valeur de x.
(3) Tracer la courbe représentative de f.
(4) On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1; +\infty[$.
 (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
 (b) La suite (u_n) est-elle bornée? Déterminer sa limite.
(5) On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; e-1[$.
 (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < e-1$.
 (b) En déduire que (u_n) est décroissante puis convergente. Que vaut alors sa limite?