ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

À rendre le 18 Novembre

1 Série Harmonique et Série harmonique alternée

L'objectif de ce problème est d'étudier les deux suites suivantes, définies par des sommes,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1.1 Avec `SciLab`

On va commencer par essayer de voir ce qu'il se passe à l'aide de `SciLab`.

(1) (a) Écrire une fonction qui, pour chaque valeur entière $n \geq 1$ de l'argument, renvoie la valeur de H_n correspondante (on joindra une copie du programme).
(b) À l'aide de cette fonction, émettre une conjecture pour la limite de (H_n), lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on dire de la "vitesse" à laquelle on se rapproche de cette limite?

(2) Mêmes questions pour A_n.

(3) À l'aide de la fonction écrite à la Question (1), conjecturer la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}.$$

(4) On écrit alors $H_n = \ln(n) + r_n$. Comment se traduit la conjecture établie à la question précédente sur (r_n)?

(5) On calculant, toujours avec `SciLab`, des valeurs de r_n pour n très grand, expliquer pourquoi on a envie d'écrire

$$r_n = \gamma + \epsilon_n,$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\epsilon_n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty$.

(6) En admettant que r_{100000} donne une approximation de γ à 0.001 près, donner cette approximation.

L'étude ainsi réalisée avec `SciLab` nous porte à croire que l'on pourrait écrire

$$(\star) \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n, \qquad \text{où } \lim_{n \to +\infty} \epsilon_n = 0.$$

La constante γ s'appelle la *constante d'Euler*[1].

[1] Le calcul de γ par la méthode suggérée est extrêmement lent et imprécis. Euler fut le premier à proposer une méthode pour déterminer les 16 premières décimales de γ (ca. 1750) . Nombreux mathématiciens ont travaillé au cours des siècles à la détermination de davantage de décimales. En 2008, Kondo et Pagliarulo obtiennent 10 milliards de décimales. Par ailleurs, on ne sait toujours pas si γ est un nombre rationnel ou non!

1.2 Avec le stylo et la tête

(1) Montrer que (H_n) est croissante.
(2) Calculer et minorer $H_{2n} - H_{n-1}$. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que (H_n) diverge. Avec la question précédente, justifier alors que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

(3) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que ces deux suites convergent. Expliquer alors pourquoi la suite (A_n) est elle-même convergente vers une certaine valeur l.

(4) Montrer que

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \qquad \text{et que} \qquad A_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

(5) En déduire que

$$A_{2n} = H_n - H_{2n}.$$

(6) En admettant que la formule $(\star)$ est vraie[2], déterminer la valeur exacte de l.

2 Ensembles c'est tout

Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E.

(1) Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.
(2) On note

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B : \ x \notin A \cap B\}.$$

  (a) Faire un dessin pour représenter $A\Delta B$.
  (b) Montrer que

$$A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A).$$

  (c) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\complement_E A$.
  (d) Montrer que

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

  et que

$$(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\Delta(B \cup C).$$

[2] C'est le cas; la démonstration repose sur des comparaisons avec des intégrales.