ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

Solution

1 Série Harmonique et Série harmonique alternée

L'objectif de ce problème est d'étudier les deux suites suivantes, définies par des sommes,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1.1 Avec SciLab

On va commencer par essayer de voir ce qu'il se passe à l'aide de SciLab.

(1) Il y a plusieurs de façons de programmer la fonction demandée. On en propose une version, intégrant une boucle for. Une fois la fonction chargée dans l'environnement, on décide d'afficher des valeurs de plus en plus grandes (ici les puissances de 10 entre 10 et 10^8). On constate, que même si finalement la suite n'augmente pas beaucoup (alors que l'on rajoute énormément de termes), elle ne semble pas non plus bornée et on peut conjecturer que

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$$

même si cette divergence vers l'infini a quand même l'air très lente.

```
function y=harmonique(n)
    s=0;
    for i=1:n
        s=s+1/i;
    end
    y=s;
endfunction
```

```
-->for j=1:8 disp(harmonique(10^j)), end

    2.9289683

    5.1873775

    7.4854709

    9.787606

    12.090146

    14.392727

    16.695311

    18.997896
```

(2) On fait exactement la même chose pour l'autre suite. Cette fois, en revanche, il semblerait que l'on se rapproche d'une certaine valeur négative et on fait la conjecture que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \simeq -0.693147.$$

```
function y=harmoalt(n)
    s=0;
    for i=1:n
        s=s+((-1)^i)/i;
    end
    y=s;
endfunction
```

```
-->for j=1:8 disp(harmoalt(10^j)), end

  - 0.6456349

  - 0.6881722

  - 0.6926474

  - 0.6930972

  - 0.6931422

  - 0.6931467

  - 0.6931471

  - 0.6931472
```

(3) On peut, dans la console `SciLab`, calculer des valeurs successives de $\frac{H_n}{\ln(n)}$ pour n de plus en plus grand. On constate alors que l'on semble de rapprocher de 1, ce qui nous pousse à conjecturer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln(n)}=1.$$

(4) Si on écrit $H_n=\ln(n)+r_n$, l'hypothèse précédente impliquerait que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r_n}{\ln(n)}=0.$$

(5) Par définition, on a $r_n=H_n-\ln(n)$. On peut alors facilement calculer, avec `SciLab`, des valeurs de r_n pour n de plus en plus grand. On observe:

```
-->for j=1:5 disp(harmonique(10^j)-log(10^j)), end

    0.6263832

    0.5822073

    0.5777156

    0.5772657

    0.5772207
```

Ceci nous pousse à penser que (r_n) converge vers une certaine limite γ. Si $r_n\to\gamma$, alors en posant $\epsilon_n=r_n-\gamma$, on a bien $\epsilon_n\to 0$ et $r_n=\gamma+\epsilon_n$.

(6) D'après les résultats obtenus précédemment, on peut conjecturer que l'approximation demandée serait

$$\gamma\simeq 0.5772$$

L'étude ainsi réalisée avec `SciLab` nous porte à croire que l'on pourrait écrire

$$(\star)\qquad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\epsilon_n,\qquad \text{où }\lim_{n\to+\infty}\epsilon_n=0.$$

1.2 Avec le stylo et la tête

(1) Montrons que (H_n) est croissante:

$$H_{n+1}-H_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}>0,$$

ainsi la suite (H_n) est bien croissante.

(2) Le calcul donne

$$H_{2n}-H_{n-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Or, si $n \le k \le 2n$, on a que $\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2n}$. Il suit que

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_{n-1} &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\ge \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n} 1 = \frac{n}{2n} \\ H_{2n} - H_{n-1} &\ge \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si (H_n) converge vers une limite l, alors c'est aussi le cas de (H_{2n}) et de (H_{n-1}) et donc

$$\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - H_{n-1} = l - l = 0.$$

Ainsi,

$$0 \longleftarrow H_{2n} - H_{n-1} \ge \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Donc (H_n) diverge. Comme elle est croissante, on a

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

(3) Pour montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes, il faut vérifier les quatre conditions de la définition.

- Commençons par déterminer laquelle des deux suites majore l'autre, en calculant la différence:

$$A_{2n+1} - A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

  Or, $2n+1$ est impair, donc $(-1)^{2n+1} = -1$ et la différence précédente est donc négative. Ainsi, on a, pour tout $n \ge 1$,

$$A_{2n+1} \le A_{2n}.$$

- Montrer que l'écart entre les deux suite tend vers 0. On vient de calculer la différence entre les deux suite, et cette différence vaut $\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ qui tend bien vers 0 (ce qui est bien connu mais qu'on peut voir par exemple avec le théorème des gendarmes).
- (A_{2n}) décroissante. Comme toujours on calcule la différence entre deux termes consécutifs, en faisant bien attention ici à ce qu'est le terme qui succède à A_{2n} (qui est $A_{2(n+1)} = A_{2n+2}$). Plus précisément,

$$\begin{aligned} A_{2n+2} - A_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

  car $2n+2 > 2n+1$. Ainsi, la suite (A_{2n}) est bien décroissante.
- Un raisonnement complètement analogue permet de voir que

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} > 0$$

  et la suite (A_{2n+1}) est quant à elle bien croissante.

Les conditions étant vérifiées, les deux suites sont bien adjacentes. Par le théorème du même nom, on peut conclure que les deux suites convergent vers une même limite l.

On vient donc de voir que la sous-suite de (A_n) formée des termes de rangs paris convergeait vers une limite et que la sous-suite formait des termes de rangs impairs convergeait vers la même limite. Quand on "reconstitue" la suite (A_n), tous ses termes, qui sont soit de rang pair soit de rang impair, vont donc se rapprocher de cette limite, et par conséquent la suite (A_n) converge elle-même vers l. On peut faire une preuve rigoureuse à l'aide des quantificateurs et de la définition de limite, mais on choisit de l'omettre ici. Cependant, c'est un exercice instructif que l'on encourage tout étudiant motivé à tenter d'écrire.

(4) Il s'agit ici de découper chaque somme selon que l'indice est pair ou impair:

$$H_{2n} = \sum_{1\leq j\leq 2n} \frac{1}{j} = \sum_{\substack{1\leq j\leq 2n \\ j \text{ pair}}} \frac{1}{j} + \sum_{\substack{1\leq j\leq 2n \\ j \text{ impair}}} \frac{1}{j}.$$

Or,

$$(1 \leq j \leq 2n \text{ et } j \text{ pair }) \Longleftrightarrow (j = 2k \text{ et } 1 \leq k \leq n)$$

et

$$(1 \leq j \leq 2n \text{ et } j \text{ impair }) \Longleftrightarrow (j = 2k+1 \text{ et } 1 \leq k \leq n-1)$$

ce qui donne bien

$$H_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1}.$$

En remarquant que $(-1)^j$ est égal à 1 pour j pair et -1 pour j impair, le même découpage que précédemment donne

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n+1}.$$

(5) En faisant la somme des deux égalités précédentes, on a

$$A_{2n} + H_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = H_n,$$

ce qui donne bien

$$A_{2n} = H_n - H_{2n}.$$

(6) En combinant la formule $(\star)$ et l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \ln(n) + \gamma + \epsilon_n - \ln(2n) - \gamma - \epsilon_{2n} \\ &= \ln(n) - \ln(2) - \ln(n) + \epsilon_n - \epsilon_{2n} \\ &= -\ln(2) + \epsilon_n - \epsilon_{2n}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $\epsilon_n \longrightarrow 0$, donc $\epsilon_n - \epsilon_{2n} \longrightarrow 0$ et comme $A_{2n} \longrightarrow l$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = l = -\ln(2) \simeq -0.693147,$$

ce qui coïncide avec les résultats de la première partie.

2 Ensembles c'est tout

(1) Pour montrer que $A \subset B \subset C$, il faut d'abord montrer que $A \subset B$, puis que $B \subset C$. Soit alors $x \in A$. Comme $x \in A$, x est en particulier dans $A \cup B$ et par hypothèse, $A \cup B = B \cap C$ donc $x \in B \cap C$ et en particulier $x \in B$. On a donc bien $A \subset B$.

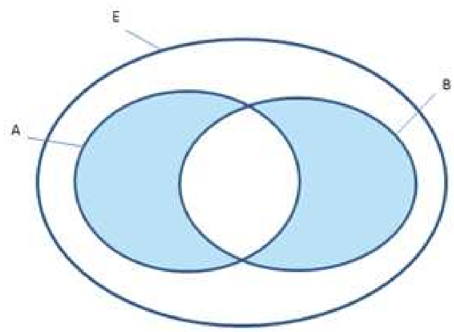
Soit maintenant $x \in B$. Montrons que $x \in C$. Comme $x \in B$, $x \in B \cup A = B \cap C$ et on a bien $x \in C$ donc $B \subset C$. Au final, on a montré

$$A \subset B \subset C.$$

(2) On définit maintenant ce qui s'appelle la *différence symétrique* des ensembles A et B.

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B : \ x \notin A \cap B\}.$$

(a) On représente ci-dessous, en bleu, la différence symétrique $A \Delta B$.



(b) Par définition

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}),$$

où la dernière égalité découle des lois de Morgan. Mais maintenant, il s'agit d'utiliser les règles de développement de $\cap$ et $\cup$:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

car $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $B \cap \overline{B} = \emptyset$. Au final, c'est exactement l'égalité souhaitée.

(c) On peut utiliser la question précédente:

$$\begin{aligned} A \Delta A &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \\ A \Delta \emptyset &= (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \\ A \Delta E &= (A \cap \overline{E}) \cup (E \cap \overline{A}) = \overline{A} \\ A \Delta \overline{A} &= (A \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = E. \end{aligned}$$

(d) On a d'une part

$$(A \Delta B) \cap C = \big((B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\big) \cap C = (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (A \cap C) \Delta (B \cap C) &= (B \cap C \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B \cap C}) \\ &= (B \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \\ &= (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

qui sont donc bien les deux mêmes ensembles. Les mêmes règles de calcul permettent aussi de voir que

$$(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C).$$