
Devoir Maison n°7

À rendre le 24 Novembre

Exercice 1. Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 2. (Injectivité et Surjectivité)

(1) On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

(a) f est-elle injective? surjective?

(b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

(c) On note g la **restriction** de f à $[-1; 1]$, c'est à dire que pour tout $x \in [-1; 1]$, $g(x) = f(x)$. Montrer que g est une bijection de $[-1; 1]$ dans lui-même.

(2) On considère maintenant l'application

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2y$$

(a) g est-elle injective? surjective?

(b) Déterminer $g^{-1}([0; 1])$.

(c) Expliciter $f \circ g$.

(3) Enfin, on considère l'application

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, 3x - 2y)$$

(4) Montrer que h est bijective.

(5) Expliciter $g \circ h$ puis $f \circ g \circ h$.

Exercice 3. On tire au hasard cinq cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent deux rois et 3 cartes de pique? (On expliquera le raisonnement et donnera la réponse sous forme de formule dont on calculera la valeur exacte avec SciLab).

Exercice 4. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $0 \leq p \leq n$,

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 5. (SciLab) Les réponses attendues dans cet exercice doivent intégrer la notion de vecteur-ligne.

(1) Proposer une suite d'instructions (sans boucle) permettant d'obtenir la somme des 21 premiers termes de la suite (u_n) où $u_1 = 0$, $u_2 = -7$ et $2u_{n+2} = -5u_{n+1} + 3u_n$.

(2) Proposer ensuite une seule et unique instruction permettant d'obtenir le nombre de termes, parmi les 100 premiers, qui sont compris entre -100 et 100 .