Devoir Maison n°7

Solution

Exercice 1. Dans cet exercice, il est important d'adopter une certaine rigueur mathématique afin de s'assurer d'un raisonnement cohérent. Notons donc E l'ensemble de tous les salariés de l'entreprise. D'après l'énoncé, on sait que $\#E = 800$. Puis, introduisons les sous-ensembles de E suivants:

- H l'ensemble des salariés qui sont des hommes (ainsi $\overline{H}$ correspond aux femmes salariées de l'entreprise) et on sait que $\#H = 300$;
- S l'ensemble des salariés membres d'un syndicat, on sait aussi que $\#S = 352$;
- M l'ensemble des salariés qui sont mariés dont le cardinal vaut $\#M = 424$.

Avec ces notations, le nombre recherché est exactement le cardinal de $\overline{H} \cap \overline{S} \cap \overline{M}$. Or, d'après les lois de Morgan, cet ensemble est le complémentaire de $H \cup S \cup M$. On va donc commencer par déterminer le cardinal de cette réunion que l'on soustraira au cardinal de E pour obtenir la quantité recherchée. D'après la formule du crible de Poincaré, on a

$$\#(H \cup S \cup M) = \#H + \#S + \#M - \#(H \cap S) - \#(S \cap M) - \#(M \cap H) + \#(H \cap S \cap M).$$

Mais le texte nous donne la valeur de tous ces nombres. On a donc

$$\#(H \cup S \cup M) = 300 + 352 + 424 - 188 - 208 - 166 + 144 = 658.$$

Il suit que

$$\overline{H} \cap \overline{S} \cap \overline{M} = \#E - \#(H \cup S \cup M) = 800 - 658 = 142,$$

il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées dans cette entreprise.

Exercice 2. (Injectivité et Surjectivité)

(1) On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

(a) Il est facile de voir que l'application f n'est ni injective, ni surjective. En effet, on peut voir par exemple d'une part que

$$f(2) = \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

ce qui empêche f d'être injective et de plus, tout nombre y tel que $|y| > 1$ n'a pas d'antécédent par f. Par exemple

$$f(x) = 2 \Longleftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 2 \Longleftrightarrow 2x = 2 + 2x^2 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0,$$

équation qui n'admet pas de solution réelle, donc f n'est pas surjective non plus et *a fortiori* pas bijective.

(b) Pour montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$, il faut procéder par double inclusion. Commençons par montrer que l'image directe de $\mathbb{R}$ par f est bien incluse dans $[-1;1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$, un carré étant toujours positif, on sait que

$$(x-1)^2 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad (x+1)^2 \geq 0.$$

Ceci est équivalent à

$$x^2+1 \geq 2x \qquad \text{et} \qquad x^2+1 \geq -2x,$$

ce qui donne bien l'inclusion voulue, c'est à dire $f(\mathbb{R}) \subset [-1;1]$. Pour l'inclusion inverse, on prend un élément $y \in [-1;1]$ et on montre qu'on peut trouver au moins un antécédent $x \in \mathbb{R}$ par f.

$$f(x) = y \iff \frac{2x}{x^2+1} = y \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$

C'est une équation du second degré qu'on résout via calcul du discriminant comme on l'a appris quand on était petit. On trouve $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$. Comme $|y| \leq 1$, on est assuré de la positivité de Δ et il y a donc toujours des solutions. Ces solutions sont, après simplification, si $y \neq 0$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

et $x = 0$ si $y = 0$. On a bien $f(R) = [-1;1]$.

(c) On note g la **restriction** de f à $[-1;1]$. D'après la question précédente, on sait déjà que g est surjective. En fait, si l'on regarde les deux solutions trouvées pour les antécédents d'un élément $y \in [-1;1]$, seule une des deux est un élément de $[-1;1]$, à savoir x_1. Ainsi, on voit donc que tout élément de $[-1;1]$ possède un unique antécédent par g dans $[-1;1]$ ce qui définit bien la bijectivité de g. De plus, on déduit de

$$\forall x, y \in [-1;1], \qquad g(x) = y \iff x = g^{-1}(y)$$

que

$$g^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}, \text{ si } y \neq 0 \qquad \text{et} \qquad g^{-1}(0) = 0.$$

(2) On considère maintenant l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 2y \end{array}$$

Il n'était pas très judicieux de la part du concepteur du sujet d'appeler cette nouvelle fonction g, erreur due à une relecture et un remodelage des questions de dernière minute. Néanmoins, oublions la fonction g de la question précédente et gardons à l'esprit que g ne désigne à partir de maintenant que cette nouvelle application.

(a) g est définie sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, pour regarder le caractère injectif, on fera bien attention à regarder deux éléments différents de l'espace de départ qui seront donc deux couples distincts. L'image d'un couple ne dépend que de y (la deuxième composante de l'élément de départ). Ainsi, il est très facile de voir que l'application n'est pas injective, par exemple en constatant que

$$g(0,2) = 4 = g(1,2) = g(x,2).$$

Il est également très facile de montrer que l'application est surjective. En effet, si $y \in \mathbb{R}$, alors

$$g\left(x, \frac{y}{2}\right) = y$$

et tout élément y de l'ensemble d'arrivée possède une infinité d'antécédents dans l'ensemble de départ.

(b) Par définition, $g^{-1}([0;1])$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ dont les images sont comprises entre 0 et 1:

$$(x,y) \in g^{-1}([0;1]) \iff 2y \in [0;1] \iff y \in \left[0;\frac{1}{2}\right].$$

Il suit qu'on peut prendre x n'importe où et que

$$g^{-1}([0;1]) = \mathbb{R} \times \left[0;\frac{1}{2}\right].$$

(c) Pour déterminer $f \circ g$ qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on commence par appliquer g à un élément de $\mathbb{R}^2$ puis on applique f à l'image de cet élément:

$$f \circ g : \ (x,y) \xrightarrow{g} 2y \xrightarrow{f} \frac{2 \times 2y}{1+(2y)^2} = \frac{4y}{1+4y^2}.$$

(3) Soit enfin l'application h définie par

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+y, 3x-2y) \end{array}$$

(4) Montrons que h est bijective: soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, montrons qu'il existe un unique antécédent (x,y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} h(x,y) = (u,v) \quad &\iff \quad (2x+y,\ 3x-2y) = (u,v) \iff \begin{cases} 2x + y = u \\ 3x - 2y = v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{2u+v}{7} \\ y = \frac{3u-2v}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de l'ensemble d'arrivée possède bien un unique antécédent dans l'ensemble de départ et l'application h est bien bijective.

(5) On compose comme précédemment

$$g \circ h : \ (x,y) \xrightarrow{h} (2x+y, 3x-2y) \xrightarrow{g} 6x-4y.$$

$$f \circ g \circ h : \ (x,y) \xrightarrow{g \circ h} 6x-4y \xrightarrow{f} \frac{12x-8y}{1+(6x-4y)^2}.$$

Exercice 3. Pour obtenir une telle main, il y a deux alternatives: ou bien on a le roi de pique, 2 autres cartes de pique, un autre roi (pris parmi les 3 restants) et une carte ni roi ni pique, ou bien on a pas le roi de pique, 3 cartes de pique (différentes du roi) et 2 rois (autres que celui de pique).

- Dans la première alternative, il y a $\binom{7}{2}$ façons de choisir 2 cartes de pique parmi les 7 possibles (on a enlevé le roi) et il y a $\binom{3}{1} = 3$ façons de choisir 1 autre roi parmi les 3 restants. Enfin, il faut choisir la dernière carte parmi les 21 qui ne sont ni des cartes de pique, ni des roi. Au total, on a $\binom{7}{2} \times 3 \times 21$ mains avec le roi de pique correspondant à la question posée.

- Dans l'autre alternative, il y a $\binom{7}{3}$ façons de choisir 3 cartes de pique parmi les 7 possibles (on ne prend pas le roi), puis $\binom{3}{2}$ façons de choisir 2 rois parmi les 3 possibles. La main est ainsi complète et il y en a $\binom{7}{3} \times \binom{3}{2}$ différentes.

On additionne les résultats des deux alternatives. Le nombre de mains contenant 2 rois et 3 cartes de pique est donc

$$\binom{7}{2} \times 3 \times 21 + \binom{7}{3} \times \binom{3}{2} = 1428$$

où la dernière égalité peut s'obtenir avec `SciLab` ou une calculatrice.

Exercice 4. On cherche à montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $0 \leq p \leq n$,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Pour $n = 0$, la seule valeur de p possible est 0. Ainsi, $\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1$ d'une part et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{1}{1} = 1$ d'autre part, ce qui donne bien l'égalité cherchée pour $n = 0$.

Supposons alors que pour un certain $n \geq 0$, et pout tous $0 \leq p \leq n$, on ait bien

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Regardons ce qu'il se passe au rang $n+1$. On voudrait montrer que, pour tous $0 \leq p \leq n+1$,

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} \stackrel{?}{=} \binom{n+2}{p+1}.$$

Il faut différencier deux cas, suivant la valeur de p. Dans le premier cas, $p = n+1$, ainsi, la formule au rang $n+1$ qu'on voudrait avoir se simplifie en

$$\sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} \stackrel{?}{=} \binom{n+2}{(n+1)+1},$$

qui est naturellement trivialement vérifiée. Considérons donc le cas où $0 \leq p \leq n$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}, \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{n+2}{p+1}, \qquad \text{d'après la formule du triangle de Pascal,}
\end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat attendu. La récurrence est ainsi vérifiée.

Exercice 5. (`SciLab`) La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2: $u_1 = 0$, $u_2 = -7$ et $2u_{n+2} = -5u_{n+1} + 3u_n$.

(1) Quand on demandais une suite d'instructions "sans boucle" pour la somme, on autorisait naturellement à utiliser une boucle pour remplir les composantes du vecteur ligne composé des 21 premiers termes de la suite. Il ne faut pas oublier d'initialiser les deux premiers termes de la suite et de commencer par conséquent la boucle au rang 3. Les instructions et le résultat affiché par `SciLab` sont:

```
-->u=zeros(1,21); u(2)=-7; for i=3:21 u(i)=u(i-1)*((-5)/2)+u(i-2)*(3/2); end sum(u)
 ans  =

    5.230D+09
```

(2) La fonction `find()` permet de trouver tous les termes d'un vecteur ligne vérifiant une certaine condition. Le résultat est un vecteur ligne composé des termes de la suite vérifiant la condition. Avec la fonction `length()` on détermine la longueur de ce vecteur ligne et ainsi le nombre de termes qui le composent. On remplit un vecteur ligne avec les 100 premiers termes de la suite. Puis on utilise, en une seule instruction `length(find())` et on voit qu'il n'y a que 4 termes! Plus précisément,

```
-->u=zeros(1,100); u(2)=-7; for i=3:100 u(i)=u(i-1)*((-5)/2)+u(i-2)*(3/2); end

-->length(find(u<=100 & u>=-100))
 ans  =

    4.
```