ECE 1 - Année 2015-2016
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°8

Solution

Exercice 1. Les chaussettes pouvant êtres rangées dans le même tiroir, il s'agit de choisir un tiroir, parmi n, k fois consécutives. Il y a donc n^k façons de ranger les paires de chaussettes. Comptons alors le nombre de ces rangements pour lesquels les chaussettes sont toutes dans des tiroirs différents. Il s'agit en fait d'ordonner k éléments parmi n, il y en a donc $A_n^k l = \frac{n!}{(n-k)!}$. Les rangements étant choisis de manière équiprobable, la probabilité utilisée est la probabilité uniforme et la probabilité cherchée est dont égale à

$$p_{n,k} = \frac{A_n^k}{n^k} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Remarque. Par une méthode déjà vue dans le cas de produits (en prenant le logarithme puis en utilisant une inégalité sur $\ln(1-x)$), on peut obtenir que

$$0 \leq p_{n,k} \leq e^{-\frac{k^2-k}{2n}}$$

(ce que l'on encourage tout étudiant à essayer de retrouver). Il suit que si le nombre de paires de chaussettes k est plus grand que $n^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ (pour $\epsilon > 0$), alors la probabilité tend vers 0.

Exercice 2. Dans un groupe d'étudiants, il y a n filles et n garçons. On veut faire des groupes de deux pour des exposés et ces groupes seront choisis au hasard.

(1) On compte le nombre de choix successifs: il y a $\binom{2n}{2}$ choix pour le premier duo, puis $\binom{2n-2}{2}$ choix pour le deuxième, et ainsi de suite. Au final, cela se simplifie et on obtient donc que le nombre liste ordonnées de duo d'étudiants est

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \times \frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!} \times \cdots \frac{2!}{2!0!} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

(2) Il y a n choix d'une fille pour le premier duo et n choix d'un garçon, dont n^2 choix possibiles pour le premier duo. Pour le second, on en a donc $(n-1)^2$ et ainsi de suite. Au final, on obtient

$$n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 1^2 = (n!)^2.$$

(3) Les duos étant tirés au hasard, c'est une probabilité uniforme. On en déduit que

$$p_n = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{2^n n! n!}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

(4) Pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n},$$

on peut procéder de manières différentes: on peut faire un calcul direct ou une récurrence. On laisse la récurrence en exercice au lecteur et on propose alors une méthode directe, un peu plus astucieuse mais instructive. Pour calculer $(2n)!$, l'idée est de séparer le produit des entiers pairs et des entiers impairs et de remarquer qu'on peut factoriser par $n!$ dans le produit des entiers pairs. Plus précisément,

$$\begin{aligned}(2n)! &= \underbrace{2n \times (2n-2) \times (2n-4) \times \cdots \times 2}_{\text{produit des entiers pairs}} \times \underbrace{(2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \cdots \times 1}_{\text{produit des entiers impairs}} \\ &= 2^n n! \times (2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \cdots \times 1.\end{aligned}$$

Il suit alors que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2^n(2n-1) \times (2n-3) \times (2n-5) \times \cdots \times 1}{n!}$$

Or,

$$2n-k-1 \leq 2n-k \leq 2n-k+1$$

ce qui permet d'encadrer

$$2^{n-1}(n-1)! = (2n-2)(2n-4)\times\cdots\times2\times1 \leq (2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times1 \leq (2n)(2n-2)\times\cdots\times2\times1 = 2^n n!$$

ce qui donne bien

$$\frac{2^{2n-1}}{n} = \frac{2^{n-1}(n-1)!2^n}{n!} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^n n! 2^n}{n!} = 2^{2n}.$$

(5) Il suffit d'utiliser l'inégalité précédente. En effet, en passant à l'inverse, on obtient

$$\frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^{2n}} \leq p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{2^n n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Il est alors clair que les termes qui encadrent p_n tendent tous deux vers 0. Par le théorème des gendarmes, on a alors également que p_n tend vers 0. Ainsi, presque sûrement, il deviendra impossible d'avoir uniquement des duos mixtes lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. (Poker) Pour calculer toutes les probabilités demandées, il s'agit de dénombrer le nombre de mains avec chacune de ces combinaisons et de diviser ce nombre par le nombre total de mains différentes, soit $\binom{32}{5} = 201376$.

- Pour dénombrer les brelans, on procède comme pour les paires dans un exercice précédent. Pour chacune des 8 valeurs, il y a $\binom{4}{3} = 4$ façon de choisir 3 couleurs parmi les 4. Il y a donc 32 brelans différents dans le jeu. Pour que les deux cartes qui complètent la main ne forment pas une paire, ni un carré avec le brelan déjà choisi, il faut donc choisir 2 valeurs distinctes et différentes de la valeur du brelan. Il y a $\binom{7}{2}$ façon de les choisir. Une fois choisies, il y a 4 possibilités de couleur pour chacune d'elle. Au final, il y a $32 \times \binom{7}{2} \times 4^2 = 10752$ mains avec un brelan soit une probabilité d'obtention de
$$p = \frac{10752}{201376} = 0.0533927.$$
- Pour le carré, c'est un peu la même méthode mais c'est plus simple. Il n'y a qu'un seul carré par valeur, soit 8 dans le jeu. Une fois le carré choisi, on complète la main avec une carte parmi les 28 restantes. Il y a donc $8 \times 28 = 224$ mains avec un carré. La probabilité correspondante est alors
$$p = \frac{224}{201376} = 0.0011123.$$
- On compte la quinte flush en comptant à partir de la carte par laquelle elle commence. Les cinq cartes devant se suivre, chaque quinte flush ne peut commencer que par 7, 8, 9 ou 10. On a pour chaque première valeur, quatre quintes flush pour chacune des quatre couleurs, soit un total de 16 quinte flush. La probabilité recherchée est donc
$$p = \frac{16}{201376} = 0.0000795.$$

- On peut faire le même raisonnement pour la suite qui va nécessairement commencer par 7, 8, 9 ou 10. Pour chaque première valeur, on a 4^5 choix car il y a cinq cartes à prendre et que les quatre couleurs sont possibles à chaque fois. Il faut cependant enlever les 4 quintes flush. Au total, on a $4 \times (4^5 - 4) = 4080$ suites différentes. La probabilité est
$$p = \frac{4080}{201376} = 0.0202606.$$
- Enfin, pour la couleur, on sélectionne une des quatre couleurs. Puis on choisi 5 cartes parmi les 8 de la couleur choisie. Mais il faut enlever les 4 quintes flush. On obtient donc $4 \times (\binom{8}{5} - 4) = 208$ mains avec une couleur. La probabilité qui en résulte est
$$p = \frac{208}{201376} = 0.0.0010329.$$

Ainsi, si on veut classer les combinaisons au Poker par leur probabilité d'apparition, la combinaison la plus forte sera la quinte flush, puis le carré, puis la couleur, la suite et enfin le brelan.

Exercice 4.

(1) Il y a six façons d'obtenir 9 en faisant la somme des trois nombres compris entre 1 et 6, et il y en a tout autant pour obtenir 10:

$$1+2+6=9; \quad 1+3+5=9; \quad 1+4+4=9; \quad 2+2+5=9; \quad 2+3+4=9; \quad 3+3+3=9.$$
$$1+3+6=10; \quad 1+4+5=10; \quad 2+2+6=10; \quad 2+3+5=10; \quad 2+4+4=10; \quad 3+3+4=10.$$

(2) Le nombre de façons d'obtenir 9 ou 10 en sommant les résultats de 3 dés semblant être le même d'après la question précédente, on serait tenté de penser que les probabilités sont égales.

Il n'en est rien. Il faut naturellement compter les permutations des ces combinaisons. Pour les combinaisons dont la somme fait 9, il y a 6 permutations de la première, 6 de la seconde, 3 de la troisième et de la quatrième, 6 de la cinquième et une seule de la sixième. Soit un total de $6+6+3+3+6+1 = 25$ issues pour un probabilité de
$$\frac{25}{6^3} = 0.1157407.$$
Il y a davantage d'issues pour une somme égale à 10. On en compte en effet $6+6+3+6+3+3 = 27$ et donc la probabilité que la somme fasse 10 est égale à
$$\frac{27}{6^3} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Exercice 5. (Johnny4ever ♡)

On va déterminer la probabilité p_k d'obtenir un T-shirt cool en étant à la $k-$ième place de la queue ($1 \leq k \leq n$). Puis on choisira la position k qui maximise cette probabilité.

Il y a, en tout $n!$ façons de distribuer n T-shirt aux n fans faisant la queue (en tenant compte de leur position dans la queue: n choix pour le premier, $n-1$ pour le second, etc...). Comptons le nombre de distributions de T-shirts pour lesquelles celui donné à la $k-$ième personne de la queue est super cool (il y a c choix pour ce T-shirt super cool). Mais toute distribution (*i.e.* permutation) associant aux $n-1$ autres personnes de la liste un des $n-1$ T-shirts restants convient. Et il il en a $(n-1)!$. La probabilité cherchée est donc
$$p_k = \frac{c(n-1)!}{n!} = \frac{c}{n}.$$

On constate qu'elle ne dépend pas de k. Peu importe l'emplacement dans le queue, on aura toujours autant de chance d'avoir un T-shirt super cool.